UFPR – UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

APOSTILA DE ESTATÍSTICA II (CE003)

GIOVANNI LEOPOLDO ROZZA

2014

1. ESTATÍSTICA

Atualmente nosso conhecimento é obtido através de um método científico, sendo MÉTODO um conjunto de meios dispostos convenientemente para se chegar ao fim que se deseja. Os dois principais MÉTODOS CIENTÍFICOS utilizados pela ciência são :

a. MÉTODO EXPERIMENTAL: Consiste em se manter constantes todas as causas (fatores), menos uma, e variar essa causa de modo que o pesquisador possa descobrir seus efeitos, caso existam.

b. MÉTODO ESTATÍSTICO: Diante da impossibilidade de manter tais causas constantes, admite-se todas as causas presentes variando-as, registrando tais variações e procurando quantificar no final a influência de cada uma delas.

Do que se trata a Estatística ?

A Estatística é a parte da Matemática Aplicada que pode ser descrita como um conjunto de técnicas que permite, de forma sistemática, organizar, descrever, analisar e interpretar os dados oriundos de estudos ou experimentos, realizados em qualquer área de conhecimento (MAGALHÃES;LIMA, 2010).

A Estatística pode ser dividida em :

a. ESTATÍSTICA DESCRITIVA: Utilizada na etapa inicial de análise, está associada a coleta, organização e descrição dos dados.

b. ESTATÍSTICA INDUTIVA OU INFERENCIAL: Técnicas que permitem a análise e a interpretação desses dados.

c. PROBABILIDADE: É a teoria matemática utilizada para se estudar as incertezas oriundas de fenômenos de caráter aleatório.

Dessa forma, a análise e a interpretação dos dados estatísticos tornam possíveis, o diagnóstico de uma empresa (por exemplo, uma escola), o conhecimento de seus problemas (condições de funcionamento, produtividade), e a formulação de soluções apropriadas e um planejamento objetivo de ação.

Alguns conceitos importantes utilizados na Estatística:

PROPULAÇÃO: É o conjunto “Universo” que contém a característica que temos algum interesse. Não se refere somente a uma coleção de indivíduos, pode ser um lote de peças, um rebanho de bovinos, a área de uma determinada região etc...

AMOSTRA: É um subconjunto da população que contenha todas as suas propriedades.

FIG. 01: Estatística Descritiva x Inferencial

EXPERIMENTO ALEATÓRIO: Um experimento que pode fornecer diferentes resultados, muito embora seja repetido toda vez da mesma maneira.

ESPAÇO AMOSTRAL: É o conjunto de **todos os resultados possíveis de um experimento aleatório**. Denotado pela letra grega Ω.

EVENTO: Um evento é um subconjunto do espaço amostral de um experimento aleatório.

1.1 VARIÁVEL ALEATÓRIA

Uma variável aleatória é uma **função que confere um número real a cada resultado no espaço amostral de um evento aleatório**. Utiliza-se a letra maiúscula para representar uma variável aleatória.

Exemplo:

Experimento → Nr. meninos de um casal com 2 filhos.

Espaço amostral → Ω ={ MM, FM, MF, FF}

A função X(w) na figura abaixo é uma VARIÁVEL ALEATÓRIA, pois associa a cada EVENTO CONTIDO NO ESPAÇO AMOSTRAL Ω UM NÚMERO REAL.

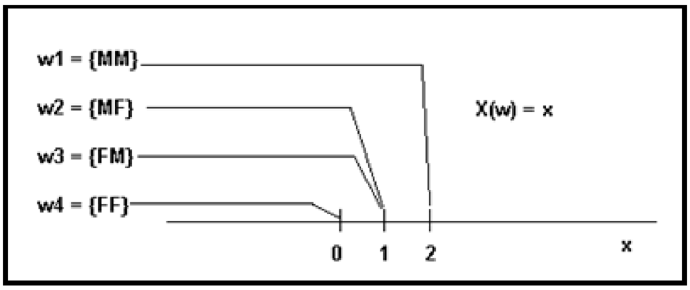


FIG. 02: X(w) é uma variável Aleatória

Evento	X(w)=x	P(X(w)=x)
FF	0	P(x=0)= 1/2*1/2 = 1/4
FM	1	P(x=1)= 1/2*1/2 = 1/4
MF	1	P(x=1)= 1/2*1/2 = 1/4
MM	2	P(x=2)= 1/2*1/2 = 1/4

Todo subconjunto A ⊂ Ω (“A está contido em Ω”) é chamado de EVENTO. Um subconjunto do espaço amostral Ω por exemplo poderia ser o evento A sendo o número de meninos igual 1, no caso o subconjunto seria:

A = { MF; FM }

O maior subconjunto não vazio possível é o próprio Ω (chamado de EVENTO CERTO, uma vez que a probabilidade de ocorrência de um evento cujo resultado é o espaço amostral é de 100%).

Um EVENTO IMPOSSÍVEL é representado pelo subconjunto Ø e se o subconjunto constituir-se de apenas um elemento w ∈ Ω (“w pertence a Ω”) então é chamado de EVENTO ELEMENTAR E INDIVISÍVEL. Por exemplo, o evento A é um subconjunto formado por dois eventos elementares indivisíveis.

1.1.1 TIPOS DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS (v. a.)

a. QUALITATIVAS: Quando os possíveis valores que assume representam atributo e/ou qualidade. Podem ser NOMINAIS quando não é possível estabelecer uma ordem entre elas ou CARDINAIS quando é possível estabelecer uma ordenação natural. Por exemplo, variáveis como Curso (Administração, Zootecnia), Gênero (feminino ou masculino) são exemplos de v. a. qualitativas nominais, ao passo que Tamanho (pequeno, médio, grande), classe social (A,B,C,D,E) são exemplos de v. a. ordinais.

b. QUANTITATIVAS: Variáveis de natureza numérica e são dividas em v. a. DISCRETAS quando seu contradomínio é um conjunto finito ou enumerável ao passo que v. a. contínuas possuem infinitos valores em seu contradomínio. Por exemplo, a v. a. do experimento da FIG. 2 é uma variável aleatória discreta, pois seu contradomínio assume valores de 0,1 e 2, ao passo que a v. a. altura do estudante universitário da UFPR pode assumir infinitos valores dentro de um determinado intervalo.

2. ESTATÍSTICA DESCRITIVA

2.1 TABELA DE DISTRIBUIÇÃO DE FREQUÊNCIA

Quadro que resume um conjunto de observações.

TABELA PRIMITIVA: Tabela cujos elementos não estão ordenados.

ROL: Tabela obtida através da ordenação dos dados.

EXEMPLO → Taxa de administração de empresas de consórcio de Curitiba.

Tabela Primitiva:

2,56	2,5	2,62	2,52
2,69	2,53	2,65	2,63
2,61	2,57	2,55	2,59
2,54	2,64	2,68	2,68
2,71	2,74	2,75	2,62

Rol:

2,5	2,56	2,62	2,68
2,52	2,57	2,63	2,69
2,53	2,59	2,64	2,71
2,54	2,61	2,65	2,74
2,55	2,62	2,68	2,75

CLASSES DE FREQUÊNCIAS: Intervalos de variação da v. a. Representadas simbolicamente por i=1,2,3...k onde k é o número total de classes por distribuição.

CÁLCULO DO NÚMERO DE CLASSES: Utiliza-se a fórmula de *Sturges* para o cálculo do número de classes:

$$\mathrm{k} = 1 + 3{,}3 * \log \mathrm{n}$$

Onde:

k = número de classes
n = número de dados disponíveis

No exemplo → k = 1 + 3,3 log 20 = 5,29 (5 ou 6 classes)

AMPLITUDE TOTAL: É a diferença entre o maior valor e o menor valor de um conjunto de dados. Dado pela fórmula:

$$\mathrm{AT} = \text{valor máximo} - \text{valor mínimo}$$

No exemplo → *AT = 2,75 – 2,5 = 0,25 %*

AMPLITUDE DE CLASSE: É a medida do intervalo que define uma classe. Dado pela fórmula:

$$\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{k}}$$

No exemplo: $\mathrm{AC} = \frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{k}} = \frac{0{,}25}{5} = 0{,}05\ \%$

PONTO MÉDIO DE UMA CLASSE: É o valor que divide o intervalo de classe em duas partes iguais, é dado pela fórmula:

$$\mathrm{x_i} = \frac{\mathrm{L_i} + \mathrm{S_i}}{2}$$

Onde:

x_i = ponto médio da classe i
L_i = limite inferior da classe i
S_i = limite superior da classe i

Por exemplo: Para $x_3 = \frac{(2{,}65+2{,}60)}{2} = \frac{5{,}25}{2} = 2{,}625\ \%$

FREQUÊNCIAS SIMPLES f_i : São os valores que representam o número de dados de uma classe.

FREQUÊNCIAS RELATIVAS f_{ri} : Quociente entre as frequências simples e a frequência total.

$$\mathrm{f_{ri}} = \frac{\mathrm{f_i}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{fi}}$$

FREQUÊNCIA ACUMULADA F_i: É o total das frequências absolutas de todos os valores inferiores ao limite superior do intervalo de uma dada classe.

FREQUÊNCIA RELATIVAS ACUMULADA F_{ri}: É o total das frequências relativas de todos os valores inferiores ao limite superior do intervalo de uma dada classe.

No exemplo:

TAXA DE ADMINISTRAÇÃO DE EMPRESAS DE CONSÓRCIO DE CURITIBA

CLASSE **Taxa de Admin.**	FREQÜÊNCIA **Núm. de empresas** f_i	Ponto médio de classe x_i	Freqüência Relativa (%) **fri**	Freqüência Acumulada **Fi**	Frequência Relativa Acumulada (%) Fri
2,50 ├── 2,55	4	2,525	20	4	20
2,55 ├── 2,60	4	2,575	20	8	20
2,60 ├── 2,65	5	2,625	25	13	65
2,65 ├── 2,70	4	2,675	20	17	85
2,70 ├── 2,75	3	2,725	15	20	100
TOTAL	20	-	100	-	

FIG. 03: Tabela de distribuição de frequências

2.2 GRÁFICOS

2.2.1 HISTOGRAMA

O histograma é formado por um conjunto de retângulos justapostos cujas bases se localizam sobre o eixo horizontal de tal modo que seus pontos médios coincidam com os pontos médios do intervalo de classes.

As larguras dos retângulos são iguais às amplitudes dos intervalos de classe. As alturas dos retângulos devem ser proporcionais às frequências das classes.

No exemplo:

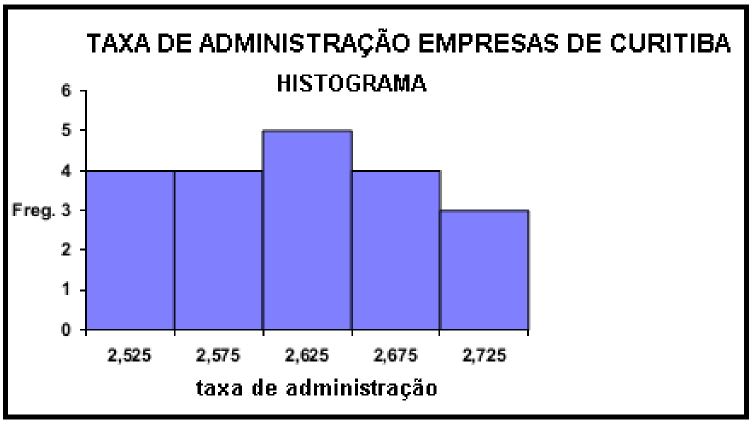


FIG. 04: Histograma taxa de administração empresas de consórcio de Curitiba

2.2.2 POLÍGONO DE FREQUÊNCIAS

O polígono de frequências é um gráfico em linha, sendo as frequências marcadas sobre perpendiculares ao eixo horizontal, levantadas pelos pontos médios dos intervalos de classes.

No exemplo:

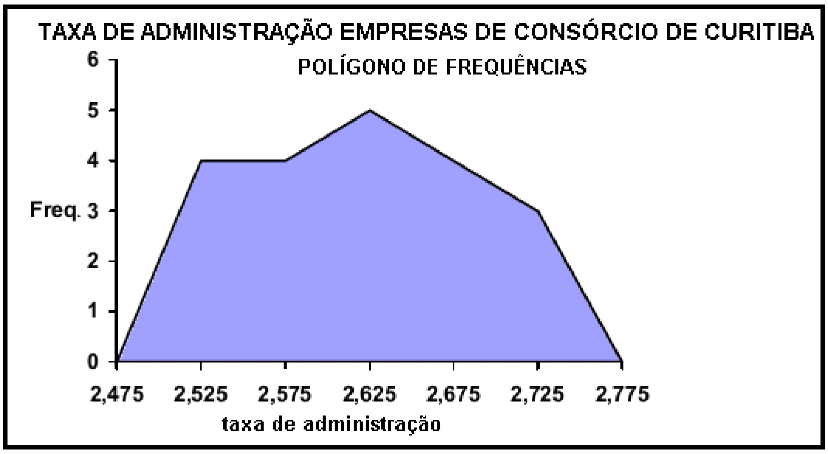


FIG. 05: Polígono de frequências taxa de admin. empresas de consórcio de Curitiba

2.3 MEDIDAS DE POSIÇÃO OU MEDIDAS DE TENDÊNCIA CENTRAL

Medidas de posição ou de tendência central são medidas que procuram identificar qual o valor em torno do qual os dados naturalmente tendem a se agrupar. Entre as principais medidas de tendência central encontramos:

a. Média Aritmética;
b. Moda;
c. Mediana.

2.3.1 MÉDIA ARITMETICA $\bar{x}$

a.DADOS ISOLADOS **POPULAÇÃO** **AMOSTRA**

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

b.DADOS AGRUPADOS **POPULAÇÃO** **AMOSTRA**

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i fi}{\sum_{i=1}^{k} fi} \qquad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i fi}{\sum_{i=1}^{k} fi}$$

Onde:

onde: x_i = valores da variável ou ponto médio da classe no caso de dados agrupados.

n = número de elementos da amostra
N = número de elementos da população
k = número de classes
f_i = número de ocorrências da classe

Em nosso exemplo da taxa de administração de empresas de consórcio:

Para dados isolados : **$\bar{x}$ = 2,619 %**
Para dados agrupados : **$\bar{x}$ = 2,62 %**

2.3.2 MEDIANA Mi ou $\tilde{x}$

A mediana divide ao meio o conjunto de dados ordenados, em que 50% dos valores se posicionam abaixo da mediana e 50% dos valores acima dela. A mediana tem duas formas de cálculo.

a. Se o número de dados ordenados for impar:

Ordena-se em uma sequência crescente os dados e identifica-se o valor que separa um mesmo número de elementos à direita e a esquerda. Por exemplo, seja o conjunto de dados abaixo:

5,13,10,2,18,15,6,16,9

Ordena-se os valores, temos então

2,5,6,9,**10**,13,15,16,18

A mediana $\tilde{x}$ é 10, pois existem 4 valores à sua esquerda e 4 valores à sua direita.

Como formula geral para valores ímpares (onde *n* é o número de dados da sequência ordenada):

$$\tilde{x} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

a. Se o número de dados ordenados for par:

A mediana será o valor compreendido entre os dois valores centrais da série, assim, para a sequência abaixo (já ordenada):

2,6,7,**<u>10,12</u>**,13,18,21

Logo $\tilde{x} = \frac{10+12}{2} = 11$

Como formula geral para valores ímpares (onde *n* é o número de dados da sequência ordenada):

$$\tilde{x} = \frac{x_{n/2} + x_{n/2+1}}{2}$$

Em nosso exemplo de taxas de administração de consórcios, a mediana seria:

2,5	2,56	**<u>2,62</u>**	2,68
2,52	2,57	2,63	2,69
2,53	2,59	2,64	2,71
2,54	2,61	2,65	2,74
2,55	**<u>2,62</u>**	2,68	2,75

$$\mathrm{Md} = \frac{2{,}62 + 2{,}62}{2} = 2{,}62\ \%$$

2.3.3 A MODA Mo ou $\hat{x}$

A moda é o valor que ocorre com maior frequência em uma série de valores. Desse modo o salário modal dos empregados de uma indústria seria o salário mais comum, recebido pelo maior número de empregados dessa indústria.

Por exemplo a série de dados

7,8,9,**<u>10,10</u>**,11,12,13,15

tem moda igual a 10 ($\hat{x} = 10$).

Pode-se se ter mais de uma valor que ocorre com maior frequências, temos então um conjunto bimodal, trimodal ou plurimodal. A ausência de uma moda caracteriza o conjunto como amodal.

Em nosso exemplo de taxas de administração de consórcios, a moda seria novamente $\hat{x} = 2{,}62$ % e $\hat{x} = 2{,}68$ % (bimodal).

2.3.4 POSIÇÃO RELATIVA DA MÉDIA, MEDIANA E MODA.

Quando uma distribuição é simétrica as três medidas coincidem. Porém a assimetria torna-as diferentes, sendo que essa diferença aumenta a medida que aumenta a assimetria. A curva gaussiana, ou curva normal, sendo uma distribuição simétrica, tem-se a concordância dos valores da média, mediana e moda.

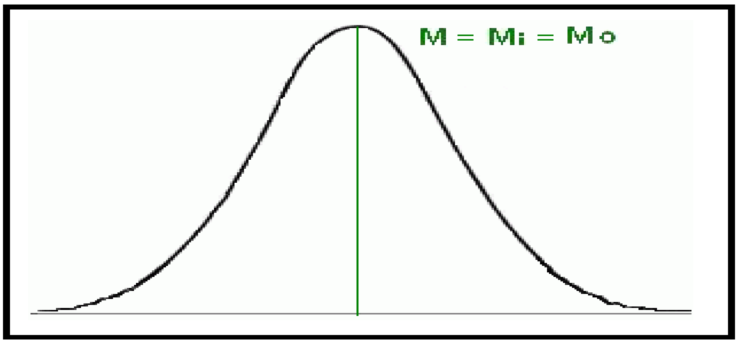


FIG. 06: A distribuição normal tem média, mediana e moda iguais

2.3.5 FRACTIS

Fractis são números que particionam (dividem) um conjunto de dados ordenados em partes iguais.

2.3.5.1 OS QUARTIS

Denomina-se quartil os valores de uma série que a dividem em quatro partes iguais.

Existem 3 quartis:

a. O primeiro Quartil (Q_1) – o valor situado de tal modo na série que uma quarta parte (25%) dos dados é menor que ele, e as três quartas partes (75%)restantes são maiores;

b. O segundo Quartil (Q_2) – É a mediana (**$Q_2 = \tilde{x}$**);

c. O terceiro Quartil (Q_3)) – o valor situado de tal modo na série que as três quartas partes (75%) dos dados são menores que ele, e a última quarta parte (25%) é maior.

2.3.5.1 COMO CALCULAR OS QUARTIS

Seja n o número total de elementos da amostra, devemos calcular $\frac{j(n+1)}{4}$, para j=1,2 e 3.

Desta forma o quartil Qj será um elemento entre Xk e X_{k+1}, onde **k é o maior inteiro menor que j(n+1)/4** e será calculado da seguinte forma

$$Q_j = X_k + \left(\frac{j(n+1)}{4} - k\right)(X_{k+1} - X_k)$$

Por exemplo, seja a sequência abaixo:

7,1 7,4 7,5 7,7 7,8 7,9

Assim temos para o primeiro quartil Q_1 (j=1) então:

$\frac{j(n+1)}{4} = \frac{1(6+1)}{4}$ = 7/4 = 1,75 e com isso k = 1, logo,

$$Q_1 = X_1 + (1{,}75 - 1)(X_2 - X_1) = 7{,}1 + (0{,}75) * (7{,}4 - 7{,}1) = 7{,}325$$

Para o segundo quartil Q_2 (j=2) então:

$\frac{2(n+1)}{4} = \frac{2(6+1)}{4}$ = 14/4 = 3,5 e com isso k = 3, logo,

$$Q_2 = X_3 + (3{,}5 - 3)(X_4 - X_3) = 7{,}5 + (0{,}5) * (7{,}7 - 7{,}5) = 7{,}6$$

Para o terceiro quartil Q_3 (j=3) então:

$\frac{3(n+1)}{4} = \frac{3(6+1)}{4}$ = 21/4 = 5,25 e com isso k = 5, logo,

$$Q_3 = X_5 + (5{,}25 - 5)(X_6 - X_5) = 7{,}8 + (0{,}25) * (7{,}9 - 7{,}8) = 7{,}825$$

Para o nosso exemplo, teríamos:

X_1	X_2	X_3	X_4						X_{10}
2,5	**2,52**	**2,53**	**2,54**	**2,55**	**2,56**	**2,57**	**2,59**	**2,61**	**2,62**
X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}						X_{20}
2,62	**2,63**	**2,64**	**2,65**	**2,68**	**2,68**	**2,69**	**2,71**	**2,74**	**2,75**

Primeiro quartil Q_1 (j=1) então:

$\frac{j(n+1)}{4} = \frac{1(20+1)}{4}$ = 21/4 = 5,25 e com isso k = 5, logo,

$$Q_1 = X_5 + (5{,}25 - 5)(X_6 - X_5) = 2{,}55 + (0{,}25) * (2{,}56 - 2{,}55) = 2{,}5525\ \%$$

Para o segundo quartil Q_2 (j=2) então:

$\frac{j(n+1)}{4} = \frac{2(20+1)}{4}$ = 42/4 = 10,5 e com isso k = 10, logo,

$$Q_2 = X_{10} + (10{,}5 - 10)(X_{11} - X_{10}) = 2{,}62 + (0{,}5) * (2{,}62 - 2{,}62) = 2{,}62\ \%$$

Para o terceiro quartil Q_3 (j=3) então:

$\frac{j(n+1)}{4} = \frac{3(20+1)}{4}$ = 63/4 = 15,75 e com isso k = 15, logo,

$$Q_3 = X_{15} + (15{,}75 - 15)(X_{16} - X_{15}) = 2{,}68 + (0{,}75) * (2{,}68 - 2{,}68) = 2{,}68\ \%$$

Os valores para os quartis também podem ser obtidos através do histograma. Seja o histograma de nosso exemplo com os valores de frequência relativa acumulada (F_{ri}) em destaque:

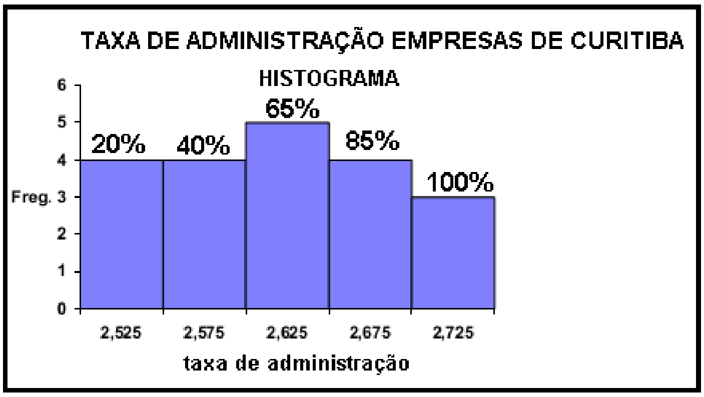


FIG. 07: O cálculo dos quartis através do histograma

Ora o primeiro quartil pode ser obtido calculando-se o área que representa 25% da distribuição, no caso de nosso exemplo seria um valor dentro do intervalo da 2ª classe, assim:

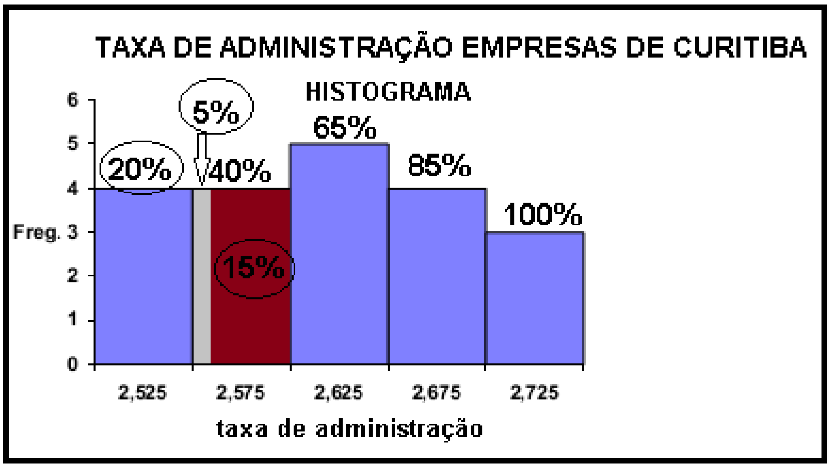


FIG. 08: Cálculo do primeiro quartil usando o histograma

O limite inferior e superior da 2ª classe seria (veja FIG. 03) 2,55 e 2,60 respectivamente, assim por equivalência de retângulos teríamos :

$$\frac{Q_1 - 2{,}55}{5/100} = \frac{2{,}60 - 2{,}55}{20/100} = \frac{Q_1 - 2{,}55}{0{,}05} = \frac{2{,}60 - 2{,}55}{0{,}20} \rightarrow Q_1 = 2{,}5625\ \%$$

O 2º quartil pode ser obtido calculando-se o área que representa 50% da distribuição, o raciocínio é semelhante ao do 1º quartil. Note que agora que o valor de Q_2 se encontra em algum lugar no intervalo da 3ª classe, cuja frequência relativa é de 25%, logo:

$$\frac{Q_2 - 2{,}60}{10/100} = \frac{2{,}65 - 2{,}60}{25/100} = \frac{Q_2 - 2{,}60}{0{,}10} = \frac{2{,}60 - 2{,}55}{0{,}25} \rightarrow Q_2 = 2{,}62\ \%$$

E para o 3º quartil, deve-se calcular o valor que representa uma área de 75% da distribuição, o valor de Q_3 se encontra em algum lugar no intervalo da 4ª classe, cuja frequência relativa é de 20%, logo:

$$\frac{Q_3 - 2{,}65}{10/100} = \frac{2{,}70 - 2{,}65}{20/100} = \frac{Q_3 - 2{,}65}{0{,}10} = \frac{2{,}70 - 2{,}65}{0{,}20} \rightarrow Q_3 = 2{,}675\ \%$$

Naturalmente com os valores calculados são aproximações dos valores encontrados através dos dados isolados, pois usamos os limites das classes para calcular os quartis. Quanto maior a quantidade de classes entretanto, mais próximo serão os valores dos valores calculados através dos dados isolados.

2.3.5.2 OS DECIS

D_1, D_2, ..., D_9. Dividem os valores ordenados e dez subconjuntos
com iguais números de elementos. $D_5 = \tilde{x}$ (mediana).

2.3.5.3 OS PERCENTIS

P_1, P_2, ..., P_{99}. Dividem os valores ordenados e cem subconjuntos com iguais números de elementos. $P_{50} = \tilde{x}$ (mediana).

2.4 MEDIDAS DE DISPERSÃO

As medidas de posição não são suficientes para descrever o comportamento de nossos dados. Por exemplo, se tivermos duas cidades com uma temperatura média de 25 graus Celsius, se apenas tivermos essa informação não podemos inferir sobre o clima das duas cidades.

Para uma mesma temperatura média, podemos ter variações grandes de temperatura em uma cidade ao passo que na outra cidade podemos ter um clima ameno uma vez que a temperatura pode variar muito pouco ao longo do dia.

Portanto é necessário sabermos o quanto nossos dados VARIAM em torno do valor médio, para isso usamos as medidas de dispersão. Algumas medidas de dispersão mais utilizadas são:

a. Amplitude Total
b. Desvio Padrão
c. Coeficiente de Variação.

2.4.1 AMPLITUDE TOTAL

A amplitude total é calculada através da diferença entre o valor MÁXIMO e o valor MÍNIMO de uma sequência de dados ordenados.

$$AT = Vmax - Vmin$$

2.4.2 VARIÂNCIA

A amplitude total é uma medida que leva em consideração apenas dois valores de nosso conjunto de dados. A variância ao contrário, computa os desvios (distância) de cada observação em relação a sua média elevado ao quadrado e calcula seu valor médio.

Assim

a.DADOS ISOLADOS **POPULAÇÃO** **AMOSTRA**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2}{N} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

b.DADOS AGRUPADOS **POPULAÇÃO** **AMOSTRA**

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2 fi}{\sum_{i=1}^{k} fi} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 fi}{\left(\sum_{i=1}^{k} fi\right) - 1}$$

Como a variância é um termo quadrático, torna-se difícil interpretar por exemplo uma variância de temperatura de 10 graus Celsius ao quadrado, costuma-se ao invés disso utilizar-se do DESVIO PADRÃO, que é nada mais que a raiz quadrada da variância.

Assim temos para a população:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

E para a amostra:

$$s = \sqrt{s^2}$$

Em nosso exemplo da taxa de administração de empresas de consórcio:

Para dados isolados : s **= 0,07391 %**
Para dados agrupados : s **= 0,06864 %**

2.4.3 COEFICIENTE DE VARIAÇÃO

O desvio padrão sozinho também não nos traz informações suficientes sobre a distribuição. Por exemplo, no planeta Terra temos um desvio padrão de temperatura global aproximado de 1,455 graus para uma temperatura média de 13,85 graus Célsius, o que certamente influencia no clima ao longo do tempo.

Entretanto esse desvio padrão praticamente não influência o clima em um planeta com Vênus, cuja temperatura média é de cerca de 470 graus Célsius.

Para isso precisamos de uma medida que calcule a variabilidade dos dados em termos relativos, em torno de seu valor médio, medida esta denominada de COEFICIENTE DE VARIAÇÃO, e é dado pela fórmula:

$$\mathrm{CV} = \frac{\mathrm{s}}{\bar{\mathrm{x}}} * 100\%$$

Em nosso exemplo da taxa de administração de empresas de consórcio:

Para dados isolados : $CV = 2{,}82\%$

Para dados agrupados : $CV = 2{,}62\%$

Significando que o desvio padrão representa apenas 2,82% da amplitude do valor da média, para o caso de dados isolados.

2.5 MEDIDA DE ASSIMETRIA

A assimetria permite identificar se uma distribuição é simétrica ou não. Um valor negativo de assimetria indica que a cauda do lado esquerdo é maior que a do lado direito e um valor positivo indica o contrário.

O cálculo da assimetria é dado pela fórmula:

$$\alpha_3 = \frac{1}{\mathrm{n}} \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{n}} \left(\frac{\mathrm{x_i} - \bar{\mathrm{x}}}{\mathrm{s}} \right)^3$$

Onde n é a quantidade de dados, $\bar{x}$ é a sua média e s é o seu desvio padrão.

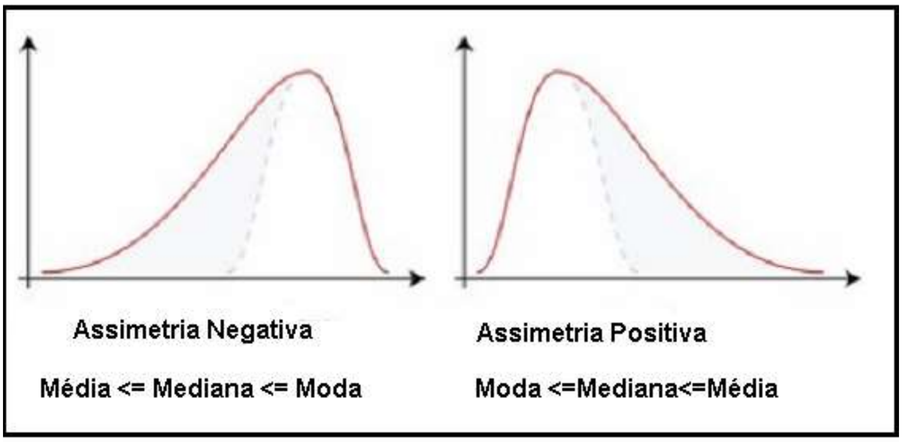


FIG. 09: Tipos de distribuições assimétricas

Em nosso exemplo da taxa de administração de empresas de consórcios, o valor da assimetria seria $\alpha_3 = 0{,}136$, indicando uma assimetria positiva.

2.6 MEDIDA DE CURTOSE

A curtose mede a forma da distribuição, se ela é mais fina e pontiaguda ou mais achatada. Um valor positivo costuma indicar um pico mais agudo, um formato mais fino com uma cauda mais gorda que a distribuição normal. Um valor negativo indica um pico mais tênue, formato mais grosso e uma cauda mais fina que a distribuição normal. Dependendo do valor da curtose a distribuição pode ser

a. MESOCÚRTICA: Tem o mesmo achatamento que a distribuição normal. O valor da curtose é igual a 3;

b. LEPTOCÚRTICA: A distribuição em questão é mais alta (afunilada) e concentrada que a distribuição normal. O valor da curtose é > 3;

c. PLATICÚRTICA: A distribuição em questão é mais achatada que a distribuição normal. O valor da curtose é < 3.

Alguns textos subtraem do valor da curtose o 3, de forma que o as fronteiras entre uma classificação e outra se encontram e torno do valor 0. Por exemplo uma distribuição mesocúrtica seria uma distribuição com curtose igual a 0.

O cálculo da curtose é dado pela fórmula:

$$\alpha_4 = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s}\right)^4$$

Onde n é a quantidade de dados, $\bar{x}$ é a sua média e s é o seu desvio padrão.

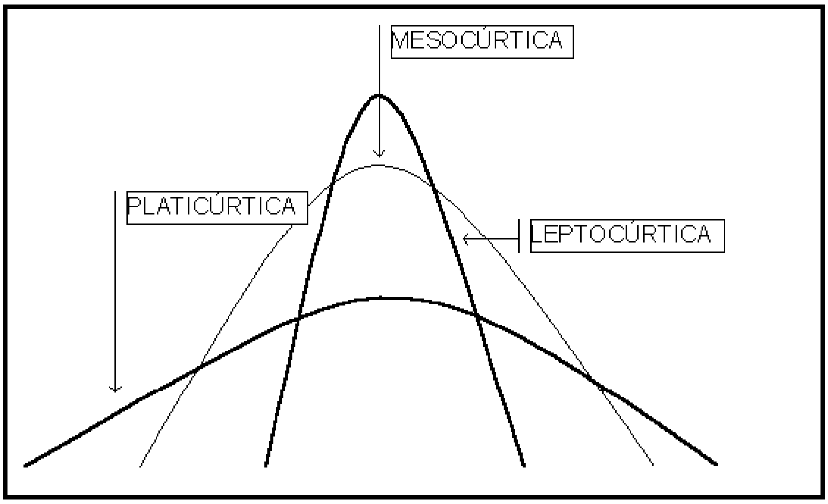


FIG. 10: Tipos de distribuições de acordo com sua curtose

Em nosso exemplo da taxa de administração de empresas de consórcios, o valor da curtose seria $\alpha_4 = 1{,}795$ (ou $\alpha_4 = -1{,}205$ caso subtraíssemos o valor 3), indicando uma distribuição platicúrtica.

2.7 O GRÁFICO BOX-PLOT

A representação gráfica dos quartis pode ser visualizada através do gráfico de caixas, do inglês *box-plot*. O *box-plot* permite identificar diversos aspectos da distribuição de dados tais como posição, assimetria e dispersão e mesmo a ocorrência de valores atípicos.

A "caixa" do gráfico tem como limite inferior o 1º quartil e o limite superior o 3º quartil. A mediana é representada por um traço no interior da caixa. Segmentos de reta, denominado de "bigodes" por alguns autores, partem das extremidades da caixa e terminam em valores determinados definidos a seguir.

Os limite superior do segmento de reta partindo do 3º quartil é dado pelo valor máximo e o limite inferior é dado pelo valor mínimo.

Entretanto os valores máximo e mínimo não são representados pelos valores máximos e mínimos do conjunto de dados.

A amplitude do intervalo $\boldsymbol{Q=Q_3-Q_1}$ recebe o nome de intervalo interquartil e representa o intervalo onde se encontrariam 50% das observações.

O LIMITE SUPERIOR (ponto de corte superior) do segmento de reta partindo do 3º quartil é dado por $\boldsymbol{Q_3 + 1{,}5Q}$ e o LIMITE INFERIOR (ponto de corte inferior) é dado por $\boldsymbol{Q_1 - 1{,}5Q}$.

Qualquer valor acima ou abaixo desses limites são considerados atípicos e marcados como um asterisco acima ou abaixo dos segmentos de reta.

Em nosso exemplo da taxa de administração de consórcios, o *box-plot* seria assim:

Mínimo	**2,5**
1º Quartil	**2,5525**
Média	**2,619**
Mediana	**2,62**
3º Quartil	**2,68**
Máximo	**2,75**
Ponto de corte inferior	2,5525-1,5(2,68-2,5525)=**2,36125**
Ponto de corte superior	2,6800+1,5(2,68-2,5525)=**2,87125**

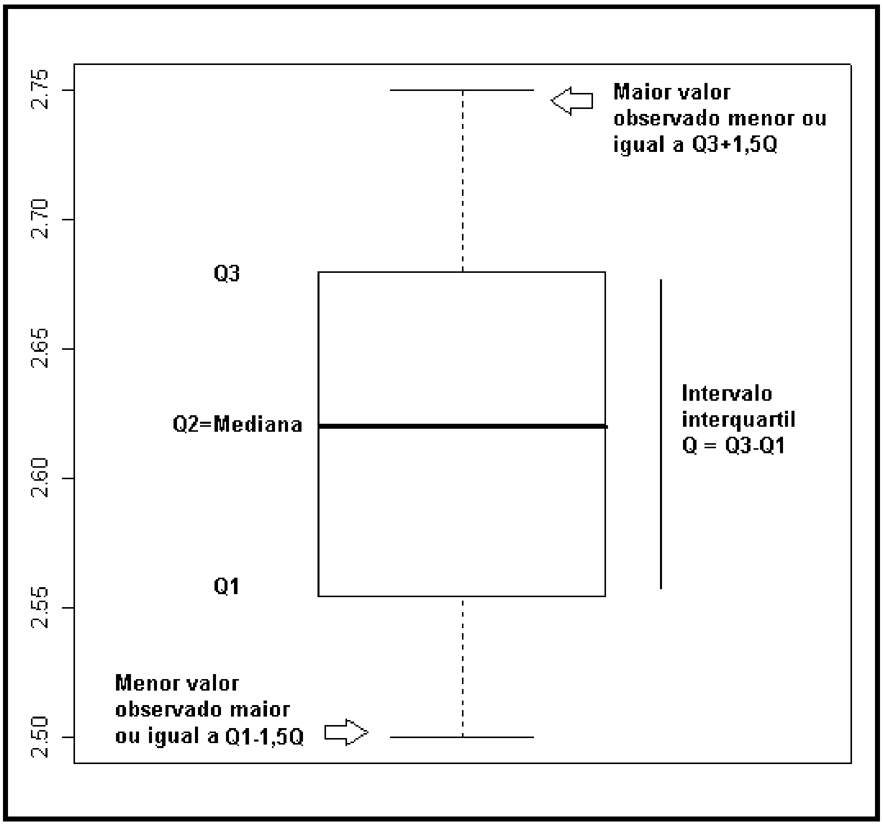


FIG. 11: O gráfico box-plot do exemplo taxas de administração

Perceba que os valores máximo e mínimo estão dentro dos limites dos pontos de corte inferior e superior, neste caso o limite dos segmentos de reta coincidem com os valores máximo e mínimo encontrados no conjunto de dados.

Se por exemplo, alguns valores se encontrassem fora do intervalo do ponto de corte superior. Nesta situação o limite superior seria o maior valor menor que 2,87125. E os pontos maiores que 2,87125 seriam plotados como asterisco pois são valores considerados atípicos, portanto não esperados, e são chamados de *outliers*. Apesar de atípicos esses valores não devem ser imediatamente associados a erros da experimentação, devendo ser motivos de investigação.

Repetindo, os pontos de corte inferior e superior **não fazem parte do gráfico *box-plot*,** esses valores são usados apenas como regra de decisão para classificar os valores da amostra como valores típicos ou atípicos.

O formato do *box-plot* de nosso exemplo também mostra assimetria pois a caixa e os segmentos de reta não estão igualmente divididos em torno da mediana. O segmente de reta que parte do 1º quartil é mais curto que o segmento de reta do 3º quartil, indicando assimetria positiva.

LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício 1. A tabela abaixo apresenta uma distribuição de frequência das áreas de 400 lotes:

Áreas (m^2)	300 |-- 400	|--500	|-- 600	|-- 700	|--800	|--900	|-- 1.000	|-- 1.100	|-- 1.200
Nº de Lotes	14	46	58	76	68	62	48	22	6

Determine:
a) o limite inferior da quinta classe
b) o ponto médio da sétima classe.
c) a amplitude do intervalo da sexta classe
d) a frequência da quarta classe.
e) a frequência relativa da sexta classe
f) a freq. acumulada da quinta classe.
g) o número de lotes cuja área não atinge 700 m2.
h) o número de lotes igual ou maior a 800 m2.
i) a porcentagem dos lotes cuja área não atinge 600 m2.
j) a porcentagem dos lotes cuja área é de 500 m2, no mínimo, mas inferior a 1.000 m2.

Exercício 2. A distribuição de frequências a seguir representa a tabela de distribuição de frequências do índice consolidado de qualidade de determinado produto, respondido por questionário enviado para uma amostra de clientes, cuja escala vai de 0 a 3.

Índice de Qualidade	Nr. Clientes
1,00 ├─ 1,20	60
1,20 ├─ 1,40	160
1,40 ├─ 1,60	280
1,60 ├─ 1,80	260
1,80 ├─ 2,00	160
2,00 ├─ 2,20	80
Total	

a) Construa o histograma e polígono de frequências.
b) Calcule os três quartis a partir do histograma.

Exercício 3. A tabela abaixo lista os depósitos bancários da empresa ACME, em milhares de Reais em Fev/Mar de 2014:

3,7	1,6	2,5	3,0	3,9	1,9	3,8	1,5	1,1
1,8	1,4	2,7	2,1	3,3	3,2	2,3	2,3	2,4
0,8	3,1	1,8	1,0	2,0	2,0	2,9	3,2	1,9
1,6	2,9	2,0	1,0	2,7	3	1,3	1,5	4,2
2,4	2,1	1,3	2,7	2,1	2,8	1,9		

a) Construa a tabela de distribuição de frequências
b) Construa o histograma e o polígono de frequências
c) Calcule os quartis e construa o gráfico box-plot. O que vc pode dizer dessa distribuição em relação a sua simetria ?

Exercício 4. Utilizando os dados do exercício 3 determine:

a) Média Aritmética para dados isolados
b) Desvio padrão para dados isolados
c) Mediana para dados isolados
d) Moda para dados isolados
e) Coeficiente de Variação

Exercício 5. Considerando duas amostras sobre valores (R$) de almoço em duas redes de restaurantes de Curitiba.

Rede A - 15 21 12 18 15 16
Rede B - 12 10 12 21 17 10 17

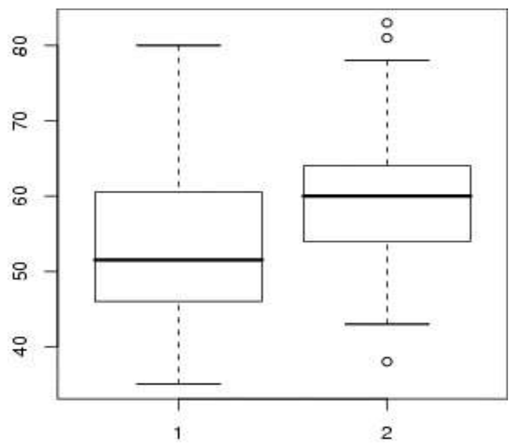
a) Construa o box-plot para cada rede e informe qual a rede é mais barata através da Mediana.
b) Com 25% quem tem o preço mais caro ?
c) Com 75% quem tem o preço mais caro ?

Exercício 6. Um gerente de operações retirou uma amostra com 150 calhas metálicas e descobriu que a média aritmética do peso é 18,5 quilos, com desvio-padrão de 2,2 quilos. A média aritmética do comprimento é 14,3 m, com desvio-padrão de 2,3 m. Qual dos dois itens tem o menor coeficiente de variação?

Exercício 7. Descubra se existe algum *outlier* no conjunto de dados abaixo. Caso positivo, identifique-os.

10,2	14,1	14,4	14,4	14,4	14,5	14,5	14,6
14,7	14,7	14,7	14,9	15,1	15,9	16,4	

Exercício 8. Foram coletados dados de uma medida de produtividade de 40 funcionários da linha de produção de 2 fábricas. A figura abaixo mostra os box-plots obtidos com os dados dos dois grupos. Discuta o resultado comparando os dois grupos.



Exercícios recomendados de livros:

MAGALHÃES, Marcos Nascimento; DE LIMA, Antonio Carlos Pedroso. **Noções de probabilidade e estatística.** IME-USP, 2000.

CAP 1 – Seção 1.4 – Exercícios 9, 11, 12, 13, 16, 17

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A**. Estatística básica.** Saraiva, 2010.

CAP 3 – Seção 3.8 – Exercícios 16,24,25,26

2. PROBABILIDADE

2.1 INTRODUÇÃO

Caracterizamos como um FENÔNEMO ALEATÓRIO a situação ou acontecimento cujos resultados são estocásticos, ou seja, não temos certeza de qual será o resultado.

Exemplos de fenômenos aleatórios são o índice da BOVESPA em um determinado dia no futuro, o clima, a taxa de inflação no próximo mês, a taxa de aprovação da turma de Estatística etc.

Entretanto modelos de probabilidade podem ser estabelecidos para quantificar a incerteza das ocorrências.

Antes de elaborarmos sobre a teoria de probabilidade, é importante revermos alguns conceitos de teoria de conjuntos.

Como já vimos anteriormente, o conjunto universo (espaço amostral) Ω é o conjunto que representa todas os resultados possíveis de nosso fenômeno aleatório. O conjunto vazio Ø representa o resultado impossível (evento impossível) e as letras maiúsculas A, B, C representam subconjuntos (evento qualquer) de nosso conjunto universo.

Dessa forma:

Universo : Ω ou U

Vazio : $\varnothing$

União : $A \cup B$

Intersecção : $A \cap B$

Complemento : A' ou $\overline{A}$ ou A^c

Diferença : $A - B = A \cap B^c$ (A mas não B, ou elementos de A que não pertencem a B)

PROPRIEDADES DE CONJUNTOS

- $A \cup B = B \cup A$ → Lei Comutativa da União
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ → Lei Associativa da União
- $A \cap B = B \cap A$ → Lei Comutativa da Interseção
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ → Lei Associativa da Interseção
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ → Lei distributiva da Interseção
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ → Lei distributiva da União
- Se $A \subset B$, então $A^c \supset B^c$ ou $B^c \subset A^c$ "se o conjunto A está contido em B então o complemento de A contém o complemento de B ou o complemento de B está contido em A"
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ → 1ª. Lei de De Morgan
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ → 2a. Lei de De Morgan
- $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
- $A \cup \Omega = \Omega$; $A \cap \Omega = A$;
- $A \cup \varnothing = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup A^c = \Omega$; $A \cap A^c = \varnothing$

- $A \cup A = A$; $A \cap A = A$

CONJUNTOS DIJUNTOS: Conjuntos disjuntos ou mutuamente exclusivos são conjuntos cuja interseção é um conjunto vazio, ou seja $A \cap B = \emptyset$

2.2 DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE

A probabilidade é uma função P(.) que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral. Em nosso exemplo da FIG. 2 atribuímos valores de probabilidade aos seguintes resultados possíveis do evento "Número de meninos em famílias com 2 filhos":

P(x=0)= 1/4 (25%)
P(x=1)= 2/4 (50%)
P(x=2)= 1/4 (25%)

2.3 DEFINIÇÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE (Fermat e Pascal, metade do século XVII)

Se existem ***a*** resultados possíveis favoráveis à ocorrência de um evento **A** e **b** resultados possíveis não favoráveis à ocorrência de **A**, e sendo todos os resultados **elementares e igualmente prováveis**, então a probabilidade do evento **A** ocorrer é:

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

Como ***a+b* =** Ω, então:

$$P(A) = \frac{\# A}{\# \Omega}$$

Exemplo : Seja Ω = {1,2,3,4,5,6} o conjunto de resultados possíveis do lançamento de um dado e A o evento número par, assim A = {2,4,6}.
Logo:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#A + \#A^c} = \frac{3}{3+3} = 0{,}5$$

2.4 DEFINIÇÃO AXIOMÁTICA DE PROBABILIDADE (Kolmogorov, 1933)

Antes de enunciarmos a definição axiomática de probabilidade, é importante entendermos a definição de SIGMA-ÁLGEBRA.

Uma classe de subconjuntos de Ω, representado por $\boldsymbol{\mathcal{A}}$, é **denominada $\boldsymbol{\sigma}$ −álgebra** (sigma-álgebra), **se satisfaz as seguintes propriedades**:

P1. $\Omega \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$;
P2. Se $A \in A$, então $A^c \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$
P3. Se $A_i \in A$, $i \geq 1$ então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$

Exemplo: Considere $\Omega = \{ 1,2,3 \}$ e os seguintes subconjuntos

$A_1 = \{ \emptyset, \Omega, \{1\}, \{2,3\} \}$

$A_2 = \{ \emptyset, \Omega, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$

A_1 e A_2 são σ –álgebras ?

Vamos verificar a propriedade P1 :

$\Omega \in A_1$ e $\Omega \in A_2$, ambos atendem a propriedade P1

Vamos verificar a propriedade P2 :

No caso de A_1, temos que:

$\emptyset^c = \Omega$ e $\Omega \in A_1$
$\Omega^c = \emptyset$ e $\emptyset \in A_1$
$\{1\}^c = \{2,3\}$ e $\{2,3\} \in A_1$
$\{2,3\}^c = \{1\}$ e $\{1\} \in A_1$

No caso de A_2, temos que:

$\emptyset^c = \Omega$ e $\Omega \in A_2$
$\Omega^c = \emptyset$ e $\emptyset \in A_2$
$\{1\}^c = \{2,3\}$ e $\{2,3\} \in A_2$
$\{2\}^c = \{1,3\}$ e $\{1,3\} \in A_2$
$\{1,3\}^c = \{2\}$ e $\{2\} \in A_2$
$\{2,3\}^c = \{1\}$ e $\{1\} \in A_2$

Portanto, tanto A_1 quanto A_2 atendem a propriedade P2

Agora vamos verificar a propriedade P3 :

Para verificar a propriedade P3, como o número de elementos é finito, basta verificar que todas as uniões possíveis de seus elementos também pertençam a A_1 ou A_2. A união de qualquer elemento com o conjunto vazio dá o próprio elemento, e com Ω dá o próprio Ω , todos os resultados portanto pertencem tanto a A_1 quanto A_2.

Quanto ao restante das uniões (levando em consideração inclusive os complementos), para A_1 temos:

$\{1\} \cup \{2,3\} = \Omega \in A_1$

$\{1\}^c \cup \{2,3\} = \{2,3\} \in A_1$

$\{1\} \cup \{2,3\}^c = \{1\} \in A_1$

$\{1\}^c \cup \{2,3\}^c = \Omega \in A_1$

Portanto, **A1 é um σ –álgebra**.

Para A_2 temos:

$\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\} \notin A_2$

O conjunto {1,2} NÃO É UM SUBCONJUNTO DE $\mathcal{A}_2$, violando portanto a propriedade P3, e portanto $\mathcal{A}_2$ não é um σ –álgebra.

Dado um subconjunto A sendo que $A \subset \Omega$ (o subconjunto A está contido em Ω) é fácil verificar que o $\mathcal{A} = \{ \emptyset, \ \Omega, \ A, \ A^c \}$ é um σ –álgebra. Assim $\mathcal{A}$ é o **menor σ –álgebra possível que contem o subconjunto A.** Fica como exercício para o leitor verificar que $\mathcal{A}$ é um σ –álgebra aplicando as 3 propriedades.

A definição mais rigorosa para a probabilidade foi estabelecida por A. N. Kolmogorov em 1933 ao apresentar um conjunto de axiomas, permitindo incluir a definição clássica e outras definições como casos particulares. Dessa forma, para todo $A \in \mathcal{A}$ a função P que **associa um número real P(A)** é chamada de **Probabilidade de A** caso os axiomas abaixo sejam satisfeitos:

Axioma A1: $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Axioma A2: $P(\Omega) = 1$

Axioma A3: Sejam $A_1, A_2, \ldots \ \forall A_i \in \mathcal{A}$; uma sequência (finita ou infinita) de eventos mutuamente exclusivos onde:

$A_i \cap A_j = \emptyset$ com $i \neq j$ então: $P(\cup_i A_i) = \sum_{i=1}^{n\ (\infty)} P(A_i)$

Dois eventos são eventos **mutualmente exclusivos** se eles não podem ocorrer ao mesmo tempo. Um exemplo disso é o lançamento de uma moeda, o qual pode resultar em cara ou coroa, mas não ambos. Em outras palavras A e B são mutuamente exclusivos se $P(A \cap B)=0$.

ESPAÇO DE PROBABILIDADES: É o trio $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ onde Ω, $\mathcal{A}$ e P foram definidos anteriormente.

2.5 PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE

2.5.1 PROPRIEDADE P1:

$$P(A^C) = 1 - P(A)$$

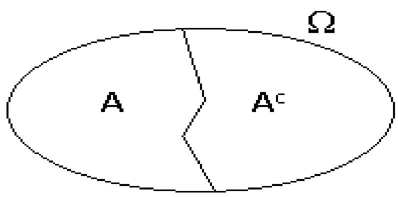


FIG. 12: Eventos aleatórios A e A^c

PROVA:

Seja a união dos eventos disjuntos $A \cup A^C = \Omega$.

Mas pelo axioma A3 temos que $P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C) = P(\Omega)$, sabe-se que $P(\Omega) = 1$ pelo axioma A2 logo:

$P(A) + P(A^C) = 1 \rightarrow P(A^C) = 1 - P(A)$ // c.q.d

2.5.2 PROPRIEDADE P2:

Se A é um evento aleatório, então $0 \leq P(A) \leq 1$

PROVA:

De acordo com o axioma A1 temos que $P(A) \geq 0$, logo $0 \leq P(A)$.

Adicionalmente, de acordo com a propriedade P1, temos que:

$P(A) + P(A^C) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(A^C)$, logo se $P(A^C)$, tende a 0, $P(A)$ tende a 1 e portanto $0 \leq P(A) \leq 1$ // c.q.d.

Exercício: Prove que $P(\emptyset) = 0$.

2.5.3 PROPRIEDADE P3:

Se $B \subset A$ então $P(B) \leq P(A)$ e $P(A - B) = P(A) - P(B)$

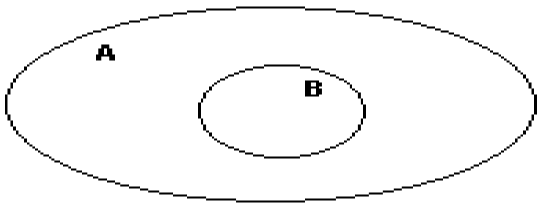


FIG. 13: Eventos aleatórios A e B sendo que $B \subset A$

PROVA:

Seja a união dos eventos disjuntos

$A = B \cup A \cap B^C$, mas $A \cap B^C = A - B$ então,

$A = B \cup (A - B)$,

e dado que são eventos disjuntos, pelo axioma A3 temos que:

$$P(A) = P[\, B \cup (A - B)]$$

$$P(A) = P(B) + P(A - B)$$

Pelo axioma A1 temos que $P(A - B) \geq 0$ então se:

$$P(A - B) = 0 \rightarrow P(A) = P(B)$$

$$P(A - B) > 0 \rightarrow P(A) > P(B)$$

Logo $P(B) \leq P(A)$ // c.q.d.

Se $P(A) = P(B) + P(A - B)$ então,

$P(A - B) = P(A) - P(B)$ // c.q.d.

2.5.4 PROPRIEDADE P4 (Teorema da Soma):

Seja A e B dois eventos quaisquer, não necessariamente mutuamente exclusivos, então:

$$P(AUB) \;=\; P(A) \;+\; P(B) - P(A \cap B)$$

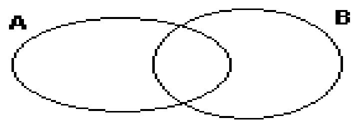


FIG. 14: Eventos aleatórios A e B

PROVA:

Podemos reescrever AUB como a união de dois eventos disjuntos, assim:

$$AUB \;=\; A \;\; U \;\; B \cap (A \cap B)^C$$

mas $B \cap (A \cap B)^C \;=\; B - A \cap B$, logo:

$$AUB \;=\; A \;\; U\,(B - A \cap B)$$

$P(AUB) \;=\; P[A \;\; U \;\; (B - A \cap B)]$, então pelo axioma A3 temos que:

$$P(AUB) \;=\; P(A) \;+\; P(B - A \cap B) \qquad (1)$$

mas sabe-se que $A \cap B \;\subset\; B$, logo pela propriedade P3 temos que:

$P(B \;-\; A \cap B) \;=\; P(B) - P(A \cap B)$, logo substituindo em (1)

$P(AUB) \;=\; P(A) \;+\; P(B) - P(A \cap B)$ // c.q.d.

Exemplo 1:

Considere o experimento lançamento de dois dados não viciados, e os seguintes eventos:

A = { soma dos dados é 10 }
B = { a multiplicação dos dados é um número maior que 25 }
C = { o números da face são iguais }

Determine:
Ω, P(A), P(B), P(C), P(A∪B), P(B∪C) e P(A^C)

Ω = { {1,1},{1,2}, {1,3}, {1,4}, {1,5}, {1,6},
{2,1},{2,2}, {2,3}, {2,4}, {2,5}, {2,6},
{3,1},{3,2}, {3,3}, {3,4}, {3,5}, {3,6},
{4,1},{4,2}, {4,3}, {4,4}, {4,5}, {4,6},
{5,1},{5,2}, {5,3}, {5,4}, {5,5}, {5,6},
{6,1},{6,2}, {6,3}, {6,4}, {6,5}, {6,6} }

A = { {4,6},{5,5},{6,4} }
B = { {5,6},{6,5},{6,6} }
C = { {1,1},}{2,2},{3,3},{4,4},{5,5},{6,6}}

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{\#B}{\#\Omega} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(C) = \frac{\#C}{\#\Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#\Omega}\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B \cup C) = \frac{\#(B \cup C)}{\#\Omega}\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$P(A^C) = \frac{\#A^C}{\#\Omega} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$$

Exemplo 2:

Um estudo realizado por uma consultoria mostrou que 45% dos funcionários de uma multinacional do segmento de nutrição animal saíram da empresa porque estavam insatisfeitos com seus salários, 28% porque consideraram que a empresa não possibilitava o crescimento profissional e 8% indicaram insatisfação tanto com o salário como com sua impossibilidade de crescimento profissional.

Considere o evento S: "o funcionário sai da empresa em razão do salário" e o evento I: "o funcionário sai da empresa em razão da impossibilidade de crescimento profissional". Qual é a probabilidade de um funcionário sair desta empresa devido a insatisfação com o salário ou insatisfação com sua impossibilidade de crescimento profissional?

$$P(S\ U\ I) = P(S) + P(I) - P(S \cap I)$$

$$P(S\ U\ I) = 0{,}45 + 0{,}28 - 0{,}08$$

$$P(S\ U\ I) = 0{,}65$$

Exemplo 3:

Uma bola é retirada ao acaso de uma urna que contém 6 bolas vermelhas, 4 bolas brancas e 5 bolas azuis. Determinar a probabilidade de a bola:

a) Ser vermelha;
b) Ser branca;
c) Não ser vermelha
d) Ser vermelha ou branca
e) Não ser vermelha ou branca

a) $P(vermelha) = \frac{modos\ de\ se\ escolher\ uma\ bola\ vermelha}{total\ de\ modos\ de\ escolher\ uma\ bola} = \frac{\#vermelha}{\#\Omega} = \frac{6}{6+4+5} = \frac{2}{5}$

b) $P(branca) = \frac{modos\ de\ se\ escolher\ uma\ bola\ branca}{total\ de\ modos\ de\ escolher\ uma\ bola} = \frac{\#branca}{\#\Omega} = \frac{4}{6+4+5} = \frac{4}{5}$

c) $P(\overline{vermelha}) = \frac{modos\ de\ se\ escolher\ uma\ bola\ \overline{vermelha}}{total\ de\ modos\ de\ escolher\ uma\ bola} = \frac{\#branca}{\#\Omega} = \frac{9}{6+4+5} = \frac{3}{5}$

ou

$P(\overline{vermelha}) = 1 - P(vermelha) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

d) $P(ver\ ou\ br) = \frac{modos\ de\ se\ escolher\ uma\ bola\ ver\ ou\ br}{total\ de\ modos\ de\ escolher\ uma\ bola} = \frac{\#(ver\ ou\ br)}{\#\Omega} = \frac{10}{6+4+5} = \frac{2}{3}$

ou

$P(ver\ ou\ br) = P(ver) + P(br) - P(ver\ \cap br) = \frac{6}{15} + \frac{4}{15} - 0 = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

e) $P(\overline{ver\ ou\ br}) = 1 - P(ver\ ou\ br) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

2.6 PROBABILIDADE CONDICIONAL

Em muitas situações práticas, o fenômeno aleatório com o qual trabalhamos pode ser separado em etapas, e a informação do que ocorreu pode alterar a probabilidade da etapa seguinte. Em outras palavras, a probabilidade da etapa seguinte está CONDICIONADA ao tipo de resultado da etapa anterior, dessa forma a probabilidade de interesse é recalculada e recebem o nome de “probabilidade condicional”. A probabilidade condicional é definida da seguinte forma:

Seja o espaço de probabilidade $(\Omega,\mathcal{A},P)$, e os eventos A,B $\in\mathcal{A}$. A probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é representada por P(A|B) e é definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

Alguns autores não definem a probabilidade P(A|B) se P(B)=0. Neste texto definiremos caso P(B) seja igual a zero, P(A|B) = P(A).

2.7 REGRA DO PRODUTO DE PROBABILIDADES

Da definição da probabilidade condicional obtém-se a regra do produto de probabilidades. Seja espaços de probabilidade $(\Omega,\mathcal{A},P)$, e os eventos A,B $\in\mathcal{A}$.Então:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B|A)$$

Exemplo 1: Um lote é formado de 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Dois artigos são escolhidos ao acaso, **sem reposição**. Ache a probabilidade de que:

Seja P = perfeito, DG = defeito grave
a) Ambos sejam perfeitos;

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) * P(P_2|P_1) = \frac{10}{16} * \frac{9}{15} = \frac{3}{8}$$

b) Ambos tenham defeitos graves;

$$P(DG_1 \cap DG_2) = P(DG_1) * P(DG_2|DG_1) = \frac{2}{16} * \frac{1}{15} = \frac{1}{120}$$

c) Ao menos 1 seja perfeito;

$$
\begin{aligned}
& P[\ (P_1 \cap P_2) \quad \cup \quad P(P_1^c \cap P_2) \quad \cup \quad P(P_1 \cap P_2^c)\ ] \\
&= P(P_1 \cap P_2) \quad + \quad P(P_1^c \cap P_2) \quad + \quad P(P_1 \cap P_2^c) \\
&= P(P_1) * P(P_2|P_1) + P(P_1^c) * P(P_2|P_1^c) + P(P_1) * P(P_2^c|P_1) \\
&= \frac{10}{16} * \frac{9}{15} \quad + \quad \frac{6}{16} * \frac{10}{15} \quad + \quad \frac{10}{16} * \frac{6}{15} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned}
$$

d) No máximo 1 seja perfeito;

$$
\begin{aligned}
& P[\ (P_1^c \cap P_2) \quad \cup \quad P_1 \cap P_2^c \quad \cup \quad P_1^c \cap P_2^c\ ] \\
&= P(P_1^c \cap P_2) \quad + \quad P(P_1 \cap P_2^c) \quad + \quad P(P_1^c \cap P_2^c) \\
&= P(P_1^c) * P(P_2|P_1^c) + P(P_1) * P(P_2^c|P_1) + P(P_1^c) * P(P_2^c|P_1^c) \\
&= \frac{6}{16} * \frac{10}{15} \quad + \quad \frac{10}{16} * \frac{6}{15} \quad + \quad \frac{6}{16} * \frac{5}{15} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

e) Exatamente 1 seja perfeito;

$$
\begin{aligned}
& P[\ P(P_1^c \cap P_2) \quad \cup \quad P(P_1 \cap P_2^c)\ ] \\
&= P(P_1^c \cap P_2) \quad + \quad P(P_1 \cap P_2^c) \\
&= P(P_1^c) * P(P_2|P_1^c) + P(P_1) * P(P_2^c|P_1) \\
&= \frac{6}{16} * \frac{10}{15} \quad + \quad \frac{10}{16} * \frac{6}{15} \\
&= 0{,}5
\end{aligned}
$$

f) Nenhum tenha defeitos graves;

$$P(\ DG_1^c \cap DG_2^c) = P(DG_1^c) * P(DG_2^c|DG_1^c) = \frac{14}{16} * \frac{13}{15} = \frac{91}{120}$$

g) Nenhum deles seja perfeito.

$$P(P_1^c \cap P_2^c) = P(P_1^c) * P(P_2^c|P_1^c) = \frac{6}{16} * \frac{5}{15} = \frac{1}{8}$$

2.8 INDEPENDÊNCIA DE EVENTOS

Seja espaços de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, e os eventos $A, B \in \mathcal{A}$. Os eventos A e B são independentes somente se:

$$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$$

Ora, se $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ então:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) * P(B)}{P(B)} = P(A)$$

Da mesma forma:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A) * P(B)}{P(A)} = P(B)$$

Portanto, para eventos independentes qualquer que seja o resultado de um evento, ele não altera a probabilidade do outro evento e vice-versa.

2.8.1 PROPRIEDADADES DE EVENTOS INDEPENDENTES

P1. O evento aleatório $A \in \mathcal{A}$ é independente de si mesmo se e somente se P(A) =0 ou P(A) = 1.

P2. Se A e B são eventos aleatórios independentes pertencentes a $\mathcal{A}$, então A e B^C,A^c e B, A^c e B^C também são independentes.

P3. Se A e B são eventos aleatórios mutuamente exclusivos pertencentes a $\mathcal{A}$, então A e B são independentes somente se P(A) = 0 ou P(B) = 0.

Exemplo 1: Um lote é formado de 10 artigos bons, 4 com defeitos menores e 2 com defeitos graves. Dois artigos são escolhidos ao acaso, **com reposição**. Ache a probabilidade de que:

Seja P = perfeito, DG = defeito grave

a) Ambos sejam perfeitos;

$$P(P_1 \cap P_2) = P(P_1) * P(P_2) = \frac{10}{16} * \frac{10}{16} = \frac{25}{64}$$

b) Ambos tenham defeitos graves;

$$P(DG_1 \cap DG_2) = P(DG_1) * P(DG_2) = \frac{2}{16} * \frac{2}{16} = \frac{1}{64}$$

c) Ao menos 1 seja perfeito;

$$\begin{array}{lcccc} & P[\ (P_1 \cap P_2) & \cup\ P(P_1^c \cap P_2) & \cup\ P(P_1 \cap P_2^c)\ ] \\ = & P(P_1 \cap P_2) & +\ P(P_1^c \cap P_2) & +\ P(P_1 \cap P_2^c) \\ = & P(P_1) * P(P_2) & +\ P(P_1^c) * (P_2) & +\ P(P_1) * P(P_2^c) \\ = & \frac{10}{16} * \frac{10}{16} & +\ \frac{6}{16} * \frac{10}{16} & +\ \frac{10}{16} * \frac{6}{16} \\ = & & \frac{55}{64} & \end{array}$$

d) No máximo 1 seja perfeito;

$$\begin{array}{lcccc} & P[\ (P_1^c \cap P_2) & \cup\ P_1 \cap P_2^c & \cup\ P_1^c \cap P_2^c\ ] \\ = & P(P_1^c \cap P_2) & +\ P(P_1 \cap P_2^c) & +\ P(P_1^c \cap P_2^c) \\ = & P(P_1^c) * P(P_2) & +\ P(P_1) * P(P_2^c) & +\ P(P_1^c) * P(P_2^c) \\ = & \frac{6}{16} * \frac{10}{16} & +\ \frac{10}{16} * \frac{6}{16} & +\ \frac{6}{16} * \frac{6}{16} \\ = & & \frac{39}{64} & \end{array}$$

e) Exatamente 1 seja perfeito;

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{P}[\ \mathrm{P}(\mathrm{P}_1^c \cap \mathrm{P}_2) \quad \cup \quad \mathrm{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2^c)\ ] \\
= \quad & \mathrm{P}(\mathrm{P}_1^c \cap \mathrm{P}_2) \quad + \quad \mathrm{P}(\mathrm{P}_1 \cap \mathrm{P}_2^c) \\
= \quad & \mathrm{P}(\mathrm{P}_1^c) * \mathrm{P}(\mathrm{P}_2) \quad + \quad \mathrm{P}(\mathrm{P}_1) * \mathrm{P}(\mathrm{P}_2^c) \\
= \quad & \frac{6}{16} * \frac{10}{16} \quad + \quad \frac{10}{16} * \frac{6}{16} \\
= \quad & \frac{15}{32}
\end{aligned}
$$

f) Nenhum tenha defeitos graves;

$$\mathrm{P}(\ \mathrm{DG}_1^c \cap \mathrm{DG}_2^c) = \mathrm{P}(\mathrm{DG}_1^c) * \mathrm{P}(\mathrm{DG}_2^c) = \frac{14}{16} * \frac{14}{16} = \frac{49}{64}$$

g) Nenhum deles seja perfeito.

$$\mathrm{P}(\mathrm{P}_1^c \cap \mathrm{P}_2^c) = \mathrm{P}(\mathrm{P}_1^c) * \mathrm{P}(\mathrm{P}_2^c) = \frac{6}{16} * \frac{6}{16} = \frac{9}{64}$$

2.9 TEOREMA DA PROBABILIDADE TOTAL

Denomina-se PARTIÇÃO DO ESPAÇO AMOSTRAL todo conjunto $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{i}$ de eventos aleatórios mutuamente exclusivos entre si e exaustivos. Eventos exaustivos são aqueles que $\cup\ \mathrm{A}_\mathrm{i} = \Omega$, ou seja, a união de todos os A_i resulta no espaço amostral **Ω.**

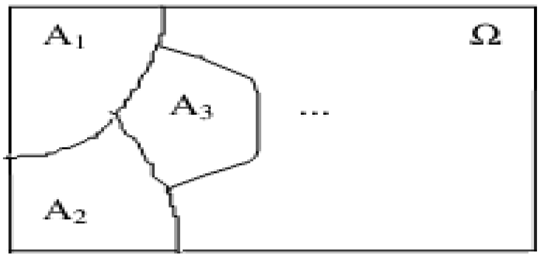


FIG. 15: Eventos aleatórios $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{i}$ disjuntos e exaustivos

Para qualquer evento B ∈ $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ tem-se que se os A_i da partição são disjuntos entre si, então $A_i \cap B$ também são, e:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{B} &= \Omega \cap \mathrm{B} = (\mathrm{A}_1 \cup \mathrm{A}_2 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_i) \cap \mathrm{B} \\
\mathrm{B} &= (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) \cup \ldots \cup (\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B})
\end{aligned}
$$

onde $(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B})$ são mutuamente exclusivos, e pelo axioma A3 de probabilidade então:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}) \\
\mathrm{P}(\mathrm{B}) &= \mathrm{P}(\mathrm{A}_1).\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_1) + \mathrm{P}(\mathrm{A}_2).\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_2) + \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{A}_i).\mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i)
\end{aligned}
$$

Assim:

$$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = \sum \mathrm{P}(\mathrm{A}_i) * \mathrm{P}(\mathrm{B}|\mathrm{A}_i) \qquad\qquad \forall\ \mathrm{B} \in \boldsymbol{\mathcal{A}}$$

2.10 TEOREMA DE BAYES

Com base no teorema da probabilidade total, é possível calcular a probabilidade do evento Aj dado a ocorrência do evento B, pela equação:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_j) * P(B|A_j)}{P(B)} = \frac{P(A_j) * P(B|A_j)}{\sum P(A_i) * P(B|A_i)}$$

O teorema de Bayes possibilita conhecermos uma probabilidade condicional através do conhecimento de outras probabilidade condicionais.

Exemplo 1: Consumidores são usados para avaliar projetos iniciais de produtos. No passado, 95% dos produtos altamente aprovados recebiam boas revisões, 60% dos produtos moderadamente aprovados recebiam boas revisões e 10% dos produtos ruins recebiam boas revisões. Além disso 40% dos produtos tinham sido altamente aprovados, 35% dos produtos moderadamente aprovados e 25% tinham sido produtos ruins.

Seja **BR** o evento “Produto recebeu uma boa revisão”
Seja **AA** o evento “Um produto altamente aprovado”
Seja **MA** o evento “Um produto moderadamente aprovado”
Seja **PR** o evento “Um produto ruim”

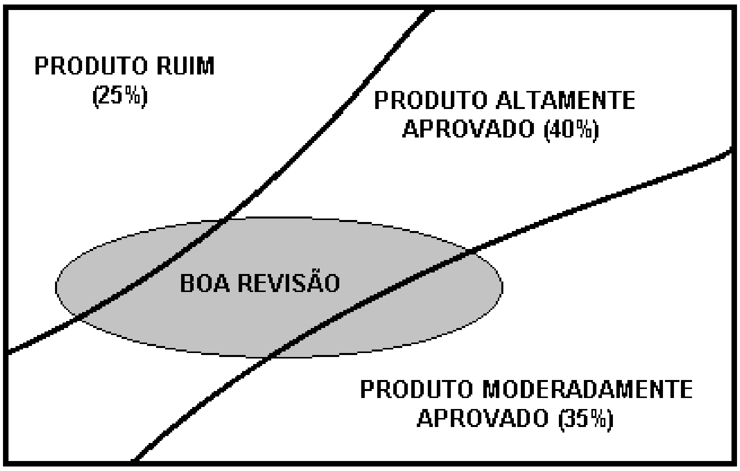


FIG. 16: Eventos BR, AA, MA, PR (exemplo 1)

a)Qual a probabilidade de um produto atingir uma boa revisão (BR) ?

$$P(BR) = P[\,(BR \cap AA) \cup (BR \cap MA) \cup \ (BR \cap PR)]$$

$$P(BR) = P(BR|AA) * P(AA) + P(BR|MA) * P(MA) + \ P(BR|PR) * P(PR)$$

$$P(BR) = 0.95 * 0.40 + 0,60 * 0.35 + 0,10 * 0,25 \ \rightarrow P(BR) = 0,615$$

b)Se um novo projeto atingir uma boa revisão, qual será a probabilidade de que ele se torne um produto altamente aprovado ?

$$P(AA|BR) = \frac{P(AA) * P(BR|AA)}{P(BR)} = \frac{0.95 * 0.40}{0,615} = 0,618$$

c)Se um produto não atingir uma boa revisão, qual será a probabilidade de que ele se torne um produto altamente aprovado ?

$$P\left(AA|BR^C\right) = \frac{P(AA) * P\left(BR^C|AA\right)}{P(BR^C)} = \frac{0{,}05 * 0{,}40}{1 - 0{,}615} = 0{,}052$$

LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício 1. Seja um Conjunto Universo dado por Ω = {0,1,2,3,4,5} e seja os seguintes subconjuntos de U:
X = {1, 2, 4}   Y = {0, 3, 4, 5}   Z = {0, 5}

Encontre :

a) $X \cap Y$ b) $X \cup Y$ c) $(X \cup Y) \cap Z$
d) $Y' \cup Z'$ e) $X - Y$ f) $(Y \cap Z)^C$
g) $(X \cap Y) \cup (Y \cap Z)$ h) $\overline{(\bar{X} \cup \bar{Y})} \cap \overline{(\bar{Y} \cup \bar{Z})}$

Exercício 2. Suponha que você retirou uma bola aleatoriamente de uma urna que contém 7 bolas vermelhas, 6 brancas, 5 azuis e 4 amarelas. Qual é a probabilidade que a bola retirada:

a) seja vermelha
b) não seja branca
c) seja branca ou azul
d) não seja vermelha e nem branca
e) seja vermelha ou azul ou amarela

Exercício 3. Suponha que ao invés de retirar 1 bola do experimento 2 você tenha retirado 2 bolas em sequência, não repondo as mesmas na urna. Calcule a probabilidade de que das bolas retiradas:

a) Ambas sejam vermelhas;
b) A primeira seja branca e a segunda seja vermelha;
c) Pelo menos uma delas seja vermelha;
d) Nenhuma seja azul
e) Uma seja azul e outra seja branca

Exercício 4. Repita o exercício 3 porém reponha as bolas na urna a cada repetição do experimento.

Exercício 5. Um lote geladeiras de certa marca apresenta um certo defeito com probabilidade de 0,2.
a) Se três lotes de geladeira forem escolhidos aleatoriamente na expedição da empresa, qual a probabilidade de todos os 3 apresentarem esse defeito?
b) Qual a probabilidade dos três lotes não apresentarem defeito ?
c) Qual a probabilidade de ao menos 1 dos três lotes apresentarem defeito ?

Exercício 6. As probabilidades de um marido, sua esposa e um filho estarem vivos daqui a 30 anos são, respectivamente; 0,35; 0,55; e 0,9. Determine a probabilidade de que, daqui a 30 anos nenhum esteja vivo?

Exercício 7. A probabilidade do departamento de Marketing apresentar alguma não conformidade severa na próxima auditoria de qualidade é de 35% e a probabilidade do departamento Financeiro é de 20%. Qual a probabilidade, de que:
a) Os dois Deptos. apresentem uma não conformidade severa ?
b) Os dois Deptos. apresentem nenhuma não conformidade severa ?
c) Ao menos um dos Deptos. apresentem uma não conformidade severa ?
d) O departamento de Marketing ou o departamento Financeiro apresente uma não conformidade severa ?

Exercício 8. Certo tipo de motor elétrico falha nas seguintes situações:

A. emperramento dos mancais;
B. queima dos rolamentos;
C. desgaste das escovas;

Suponha que o emperramento seja duas vezes mais provável do que a queima e esta é quatro vezes mais provável do que o desgaste das escovas. Qual será a probabilidade de que o motor falhe devido a cada uma dessas circunstâncias?

Exercício 9. Se P(AUB)=0,8; P(A)=0,5 e P(B)=x, determine o valor de x no caso de:
a) A e B serem mutuamente exclusivos;
b) A e B serem independentes.

Exercício 10. Uma empresa produz circuitos integrados em três fábricas A, B e C. A fábrica A produz 40% dos circuitos, enquanto que as outras produzem 30% cada uma. As probabilidade de que um circuito integrado produzido por estas fábricas não funcione são 1%, 4% e 3%, respectivamente. Responda:
a)Escolhido um circuito qual a probabilidade do circuito não funcionar?
b)Escolhido um circuito e verificou-se ser defeituoso, qual a probabilidade dele ter vindo da fábrica A?

Exercício 11. O Atlético Paranaense ganha com probabilidade 0,7 se chove e com 0,8 se não chove. Em Junho a probabilidade de chuva é de 0,3. O Atlético Paranaense ganhou uma partida em Junho, qual a probabilidade de ter chovido no dia ?

Exercício 12. Num estudo sobre conhecimento de normas internas de qualidade, foram avaliados 28 funcionários de dois departamentos A e B, determinando-se se através de questionário se o conhecimento era suficiente ou insuficiente, obtendo-se o exposto na tabela abaixo:

DEPTO	CONHECIMENTO NORMAS DE QUALIDADE		TOTAL
	SUFICIENTE (S)	INSUFICIENTE(S^C)	
A (A)	12 (0,43)	2 (0,07)	14 (0,50)
B (B)	08 (0,28)	6 (0,22)	14 (0,50)
TOTAL	20 (0,71)	8 (0,29)	28 (1,00)

a) O conhecimento suficiente sobre as normas é independente do departamento ? Justifique através da definição de independência.
Dica: $P(A|B) = P(A)$ se os eventos forem independentes.
b) Calcule $P(S|A)$
c) Calcule $P(S \cup A)$

Exercício 13. Um estabilizador pode provir de três fabricantes I, II e III com probabilidades de 0,25, 0,35 e 0,40, respectivamente. As probabilidades de que durante determinado período de tempo, o estabilizador não funcione bem são, respectivamente, 0,10; 0,05 e 0,08 para cada um dos fabricantes. Qual ´e a probabilidade de que um estabilizador escolhido ao acaso não funcione bem durante o período de tempo especificado ?

Exercício 14. Em uma universidade foi selecionada uma amostra de 500 alunos que cursaram a disciplina de Estatística. Entre as questões levantadas estava: Você gostou da disciplina de Estatística? De 240 homens, 140 responderam que sim. De 260 mulheres, 200 responderam que sim. Para avaliar as probabilidades organizou-se as informações na tabela abaixo. Qual é a probabilidade de que um aluno escolhido aleatoriamente:

Sexo	**Gostou**	**Não Gostou**	**Total**
Homem	140	100	240
Mulher	200	60	260
Total	340	160	500

a) H = Seja um homem ?
b) G = Gostou da disciplina de Estatística?
c) M = Seja uma mulher?
d) NG = Não gostou da disciplina de Estatística?
e) Seja uma mulher ou gostou da disciplina de Estatística
f) Seja uma mulher e gostou da disciplina de Estatística.
g) Dado que o aluno escolhido gostou da disciplina de Estatística. Qual a probabilidade de que o aluno seja um homem?
h) Dado que o aluno escolhido é uma mulher. Qual a probabilidade de que ela não gostou da disciplina de Estatística?

Exercício 15. Considere um baralho com 52 cartas numeradas, 13 para cada um dos naipes (ouros, copas,
espada e paus). Seja o experimento de retirar uma carta aleatoriamente, observando seu naipe,
número e/ou cor (vermelha ou preta).
Sejam os seguintes eventos:

A = [a carta retirada é um ás];
V = [a carta retirada é vermelha] e
E = [a carta retirada é de espada].

Calcule:
a) P(A), P(V) e P(E).
b) $P(A \cap V)$, $P(A \cap E)$ e $P(V \cap E)$.
c) $P(A \cup V)$, $P(A \cup E)$ e $P(V \cup E)$.
d) $P(A|V)$. Os eventos A e V são independentes
e) $P(V|E)$. Os eventos V e E são independentes
f) Suponha que você retire do baralho, aleatoriamente, duas cartas do seguinte modo: retira uma, observa seu naipe, número e cor, e a coloca de volta. Em seguida, retira a segunda carta, observa seu naipe, número e cor, e a coloca de volta. Sejam os eventos:
A1 = [a primeira carta retirada é um ás] e A2 = [a segunda carta retirada é um ás].
f.1) Sem fazer cálculos, você acha que os eventos A1 e A2 são independentes ? Ou seja, você acha que o fato da primeira carta retirada ter sido um ás altera a probabilidade de que a segunda carta seja um ás ? Então, qual é o valor de $P(A2|A1)$?
f.2) Qual é a probabilidade das duas cartas retiradas serem um ás ? Ou seja, calcule $P(A1 \cap A2)$.

Exercício 16. As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos, estão apresentados na próxima tabela:

Sexo/Filme	Comédia	Romance	Policial
Homens	136	92	248
Mulheres	102	195	62

Sorteando-se ao acaso, uma dessas locações de vídeo, pergunta-se a probabilidade de:
a) Uma mulher ter alugado um filme policial?
b) O filme alugado ser uma comédia?
c) Um homem ter alugado ou o filme ser um romance?
d) O filme ser policial dado que foi alugado por um homem?

Exercício 17. Três candidatos disputam as eleições para o Governo do Estado. O candidato do partido de direita tem 30% da preferência eleitoral, o de centro tem 30% e o de esquerda 40%. Em sendo eleito a probabilidade de dar, efetivamente, prioridade para Educação e Saúde é de 0,4;0,6 e 0,9, para os candidatos de direita, centro e esquerda, respectivamente.
a) Qual a probabilidade de não ser dada prioridade a essas áreas no próximo governo?
b) Se a área de Educação e Saúde teve prioridade, qual a probabilidade do candidato de direita ter ganho a eleição?

Exercício 18. Um modelo simplificado para a variação do preço de uma mercadoria consiste em supor que a cada dia o preço aumenta em uma unidade com probabilidade p e diminui em uma unidade com probabilidade $1 - p$. Assuma que as variações correspondentes a diferentes dias são independentes.
a) Qual a probabilidade de que, após 2 dias, o preço seja o mesmo?
b) Qual a probabilidade de que, após 3 dias, o preço tenha aumentado em uma unidade monetária?
c) Dado que, após 3 dias, o preço aumentou em uma unidade monetária, qual a probabilidade de ter aumento no primeiro dia?

Exercício 19. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas :
a) Se E é independente de F e F é independente de G, então E é independente de $F \cup G$.
b) Se E é independente de F e E é independente de G e $F \cap G = \emptyset$, então E é independente de $F \cup G$.
c) Se E é independente de F, F é independente de G e E é independente de $F \cap G$, então G é independente de $E \cap F$.

3. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Neste capítulo será adicionado aos conceitos de Probabilidade o estudo das variáveis aleatórias que associamos à característica de uma determinada população de interesse. No capítulo 1 já observamos que podemos representar os valores possíveis de uma variável aleatória e suas frequências de ocorrências.

À cada valor da variável aleatória será associado um valor de probabilidade de sua ocorrência, conforme descrito e exemplificado no exemplo dos casais com 2 filhos da Fig. 02, onde para cada valor possível de ocorrência de número de filhos do sexo masculino, atribuiu-se uma probabilidade. Nosso objeto de estudo serão as variáveis aleatórias quantitativas que podem ser divididas em:

a. Variáveis Aleatórias Discretas
b. Variáveis Aleatórias Continuas

3.1. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

Variáveis aleatórias assumem um número finito ou uma quantidade enumerável de valores.

Um exemplo de variável aleatória discreta, supõe-se um relógio a bateria como o da figura abaixo:

FIG. 17: Um relógio "discreto"

Queremos determinar a probabilidade do evento "X=Posição do ponteiro de segundos quando o relógio para por falta de bateria".

Admita que esse relógio avance a passos de 1 segundo. A cada segundo, portanto ele avançará 360/60 graus, ou seja, 6 graus, logo nosso espaço amostral será:

$$\Omega = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, x_{60}\} = \{ 0, 6°, 12°,18°,\ldots,354° \}$$

E, portanto a probabilidade de que o relógio pare em qualquer posição x_i será de $P(X = x_i) = \frac{1}{60}$ e o gráfico da função de probabilidade $P(X = xi)$ seria:

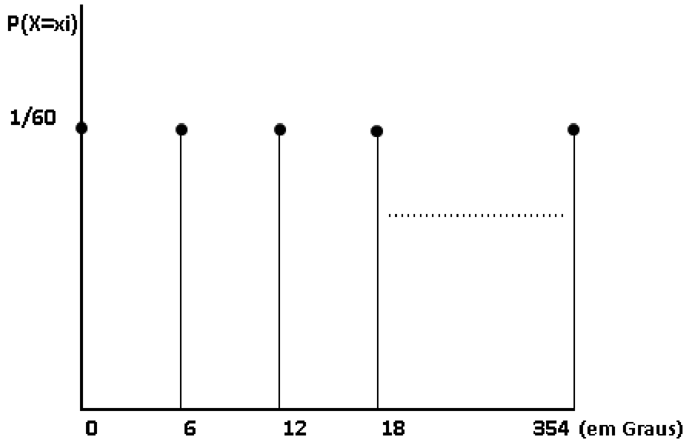


FIG. 18: Gráfico da função de probabilidade p(xi)

E a **função de probabilidade** (f.p) $P(X = x_i) = p(x_i)$ pode ser definida como:

$$p(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{60} & \text{para } x = 0, 6°, 12°, \ldots, 354° \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os axiomas de probabilidade devem ser obedecidos pela função discreta de probabilidade, logo para qualquer função de probabilidade P(X=xi) deve satisfazer:

$$\text{i.} \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = p(x_i) = 1 = P(\Omega)$$

$$\text{ii.}\ 0 \leq p(x_i) \leq 1$$

Nota: Podemos escrever “probabilidade da v.a. discreta em X=xi” como $P(X = x_i)$ ou $p(x_i)$.

No caso de exemplo do relógio com passo discreto de segundos, pode-se verificar que:

$$i. \sum_{i}^{60} P(X = x_i) = x_1 + x_2 + \cdots + x_{60} = 1 = P(\Omega)$$

$$\text{ii.}\ 0 \leq p(x_i) \leq 1 \text{ para qualquer } x_i$$

Para se calcular, por exemplo, a probabilidade do ponteiro do relógio parar na posição maior que 12 e menor ou igual a 24 graus:

$$P(12 < X \leq 24) = P(X = 18) + P(X = 24) = 2 * \frac{1}{60} = \frac{1}{30}$$

Perceba que não consideramos a ocorrência $X = x_i = 12$, pois o limite inferior do intervalo é aberto (<) e limite superior fechado (≤). Dessa forma consideramos todos os valores entre 12 (exclusive) e 24 (inclusive).

3.2. VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Agora suponha o mesmo relógio da Fig. 17, entretanto agora o passo do ponteiro dos segundos não é mais um salto a cada 6 graus, mas um movimento contínuo, de forma que temos **infinitas posições** no qual o ponteiro poderá parar ao terminar a bateria, dessa forma nosso espaço amostral será:

$$\Omega = \{ x \in \Re \mid 0 \leq x \leq 2\pi \}$$

O gráfico **da função de densidade de probabilidade** $\boldsymbol{f(x)}$ é descrito abaixo:

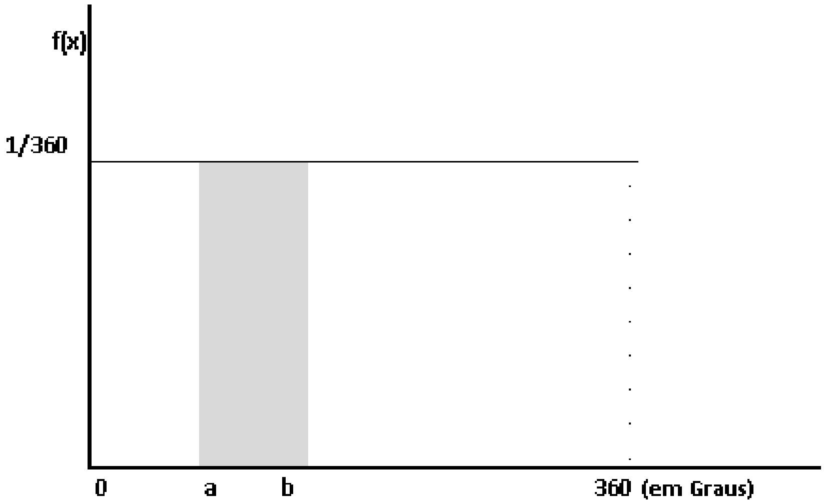


FIG. 19: Gráfico da função de densidade de probabilidade f(x)

No caso de variáveis contínuas, não podemos calcular a probabilidade de o ponteiro parar em uma determinada posição, pois existem infinitas posições entre 0 e 360 graus, neste caso nossa probabilidade seria $P(X = xi) = \frac{1}{\infty} = 0$.

Portanto, para variáveis aleatórias contínuas sempre calculamos a probabilidade como a área abaixo da curva da função de densidade de probabilidade em um determinado intervalo.

Pode-se definir a função de densidade de probabilidade $f(x)$ de nosso relógio de passo contínuo como:

$$p(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{360} & \text{para } 0 \leq x \leq 360° \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma função de densidade de probabilidade (f.d.p) *f(x)* pode ser usada para descrever uma variável aleatória contínua X se satisfaz:

$$\text{i. } f(x) \geq 0 \text{ para todo } x \in (-\infty, +\infty)$$
$$\text{ii. } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Nota: A área entre a curva de f(x) e o eixo dos x qualquer é dada pela integral da função $\int f(x)dx$.

No exemplo do relógio, caso queira-se calcular a probabilidade do ponteiro parar entre as posições **a** e **b** (representados na Fig. 19), então:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{360}dx = \frac{b-a}{360}$$

Dessa forma, para se calcular, por exemplo, a probabilidade do ponteiro do relógio parar posição maior que 12 e menor ou igual a 24 graus:

$$P(12 \leq X \leq 24) = \frac{b-a}{360} = \frac{24-12}{360} = \frac{1}{30}$$

Podemos verificar também que a f.d.p tem área igual a unidade no intervalo $(-\infty, +\infty)$:

$$P(-\infty \leq X \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{a} 0dx + \int_0^{360} \frac{b-a}{360}dx + \int_b^{+\infty} 0dx$$

$$P(-\infty \leq X \leq +\infty) = \text{zero} + \frac{360-0}{360} + \text{zero} = 1$$

A f.d.p. também é positiva ou igual a zero (não existem valores negativos) para todo o intervalo $(-\infty, +\infty)$.

No caso de variáveis aleatórias contínuas o fato dos limites serem abertos ou fechados ($<, >$ ou $\leq, \geq$) não influencia no cálculo da probabilidade (ao contrário das variáveis aleatórias discretas), uma vez que obtêm-se seu valor através do cálculo de uma área no intervalo de interesse.

3.3. FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO OU FUNÇÃO DE DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Denomina-se a **função distribuição** ou **função distribuição acumulada** de uma variável aleatória X como $F(x) = P(X \leq x)\ x \in \Re$.

Para variáveis aleatórias discretas, calcula-se F(x) como :

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{x \leq x_i} P(X = x)$$

No exemplo do relógio, para a **variável aleatória discreta** a função de distribuição $F(x)$ da variável aleatória que representa a posição do ponteiro dos segundos ao morrer a bateria seria dado por :

X=x$_i$	0	6	12	18	24	30	....	354
p(x$_i$)	1/60	1/60	1/60	1/60	1/60	1/60	....	1/60
F(x$_i$)	1/60	2/60	3/60	4/60	5/60	6/60	....	60/60

Para variáveis aleatórias contínuas, calcula-se F(x) como :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

No exemplo do relógio, para a **variável aleatória contínua** a função de distribuição $F(x)$ seria dado por :

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \frac{x}{360} & x \geq 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

3.3.1 PROPRIEDADES DA FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO

Se $F(x) \Rightarrow P(X \leq x)$ então:

1. $P(X > a)$, podemos reescrever como:
$(X \leq a) \cup (X > a) = \Omega$
$P(X \leq a) + P(X > a) = P(\Omega)$ mas $P(\Omega)$ =1 logo,
$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

2. $P(a < X \leq b)$, podemos reescrever como:
$(X \leq a) \cup (a < X \leq b) = (X \leq b)$
$P(X \leq a) + P(a < X \leq b) = P(X \leq b)$
$= P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
$= F(b) - F(a)$

3.4. ESPERANÇA OU VALOR ESPERADO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

Esperança ou Expectância de uma v. a. é um valor médio dos possíveis valores de X, ponderada conforme sua distribuição, i.e.; **é uma média ponderada onde os pesos são as probabilidades $\boldsymbol{P(x_i)}$** :

a. NO CASO DE VARIÀVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS:

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i . P(x_i)$$

b. NO CASO DE VARIÀVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f(x)$$

3.4.1 PROPRIEDADES DA ESPERANÇA

1. $E(X = c) = c$

PROVA:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} c.f(x)\,dx = c.1 = c$$

2. $E(cX) = cE(X)$

PROVA:

$$E(cX) = \int_{-\infty}^{\infty} c.x.f(x)\,dx = c.\int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)\,dx = cE(X)$$

3. $E(aX + b) = a.E(X) + b$

PROVA: decorrente das demonstrações acima.

Exemplo 1: Sejam dois dados jogados de uma só vez. A soma dos números das faces voltadas para cima é o elemento que se deseja estudar. Pode-se facilmente concluir que os valores dessa soma são números inteiros entre 2 e 12. Há, portanto, uma variável aleatória discreta X, que pode assumir 11 valores xi conforme tabela abaixo:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i) = p(x_i)$	0,028	0,056	0,083	0,111	0,139	0,167	0,139	0,111	0,083	0,056	0,028
$P(X \leq x_i) = F(x_i)$	0,028	0,083	0,167	0,278	0,417	0,583	0,722	0,833	0,917	0,972	1,000

As probabilidades de cada valor podem ser facilmente calculadas, uma vez que, em cada jogada, há 6 x 6 = 36 combinações possíveis (exemplo: o resultado 2 só pode ser 1 + 1. Assim, probabilidade 1/36 ≈ 0,028. O resultado 3 pode ser 1 + 2 ou 2 + 1, isto é, 2 combinações ou 2/36 ≈ 0,056. E de forma similar para os demais.

O gráfico da função de probabilidade X e de sua função de distribuição (acumulada) está na figura abaixo:

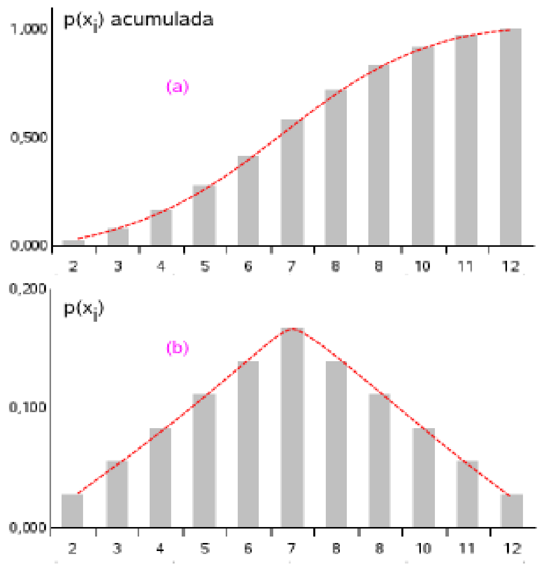


FIG. 20: Gráfico da função de probabilidade e função de distribuição da variável aleatória X

Usando a equação da esperança para variáveis discreta:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{12} x_i.P(x_i) = 2 * 0{,}028 + 3 * 0{,}056 + \cdots + 12 * {,}028 = 7$$

Exemplo 2: As probabilidades de um corretor de imóveis vender uma sala comercial com lucro de R$ 3500,00, de R$ 2500,00, R$ 800,00 ou com um prejuízo de R$ 500,00 são 0,20, 0,35, 0,22 e 0,23, respectivamente. Qual é o lucro esperado do corretor de imóveis?

$$x_1 = 3500 \ ; p(x_1) = 0{,}20$$
$$x_2 = 2500 \ ; p(x_2) = 0{,}35$$
$$x_3 = 800 \ ; p(x_3) = 0{,}22$$
$$x_1 = -500 \ ; p(x_4) = 0{,}23$$
$$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P(x_i) = 3500 * 0{,}20 + 2500 * 0{,}35 + 800 * {,}22 - 500 * 0{,}23 = 1636$$

3.5. VARIÂNCIA DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

A variância mede a dispersão dos valores de uma variável aleatória em torno de seu valor médio (Esperança). É a média ponderada pelas respectivas probabilidades dos desvios relativos á média, elevada ao quadrado, ou seja $V(X) = E[(X-\mu)^2]$, e é dado por:

a. NO CASO DE VARIÀVEIS ALEATÓRIAS DISCRETAS

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \mu)^2 . P(x_i)$$

a. NO CASO DE VARIÀVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu)^2 . f(x)$$

O desvio-padrão é dado por $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

A variância também pode ser dada pela seguinte equação:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

PROVA:

$$E(X-\mu)^2 = E\{ X^2 - 2.X.E(X) + [E(X)]^2 \}$$
$$E(X-\mu)^2 = E(X^2) - 2.E(X).E(X) + [E(X)^2]$$
$$E(X-\mu)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Obs: $E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p(x_i)$ para uma v.a. discreta

$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx$ para uma v.a. contínua

3.5.1 PROPRIEDADES DA VARIÂNCIA

1.$V(X + c) = V(X)$

PROVA:

$$V(X + c) = E[(X+c) - E(X+c)]^2$$
$$V(X + c) = E[(X+c) - E(X) - c]^2$$
$$V(X + c) = E[X - E(X)]^2 = V(X)$$

2. $V(cX) = c^2 . V(X)$

PROVA:

$$V(cX) = E(cX)^2 - [E(cX)]^2 = c^2E(X^2) - c^2[E(X)]^2$$
$$= c^2\{E(X^2) - [E(X)]^2\} = c^2V(X)$$

Exemplo 1: No caso da variável aleatória que representa as somas dos dados da face de dois dados em um lançamento. A média $E(X) = 7$, logo:

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{i=1}^{12}(x_i - 7)^2 . P(x_i) =$$

$$\sigma^2 = V(X) = (2-7)^2 * 0{,}028 + (3-7)^2 * 0{,}056 + \cdots + (12-7)^2 * 0{,}028 = 5{,}852$$

O desvio padrão é dado por $\sigma = \sqrt{V(X)} = 2{,}419$.

A Esperança e a Variância são **parâmetros,** usados para descrever uma característica de determinada população. Seus valores são **estimados** através de **estatística** obtida a partir de uma amostra da população. A tabela abaixo mostra a definição matemática dos parâmetros e seus correspondentes estimadores.

Denominação	***População***	***Amostra*** *(n = tamanho da amostra)*
Esperança (Média)	$\mu = E(X)$	$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$
Esperança	$\sigma^2 = V(X)$	$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$
Desvio Padrão	$\sigma = \sqrt{V}(X)$	$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$

3.6. PRINCIPAIS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

3.6.1. DISTRIBUIÇÕES DISCRETAS

3.6.1.1 DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DISCRETA

Uma v.a. tem distribuição uniforme discreta quando sua função de probabilidade for dada por:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} & x = 1,2,\ldots,N \\ 0 & c/c \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{1+N}{2} \quad V(X) = \frac{N^2-1}{12}$$

Exemplo 1:

Seja o evento X = lançar um dado, então:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\begin{aligned} p(x_i) &= 1/6 \\ E(X) &= 3{,}5 \\ V(X) &= 2{,}92 \end{aligned}$$

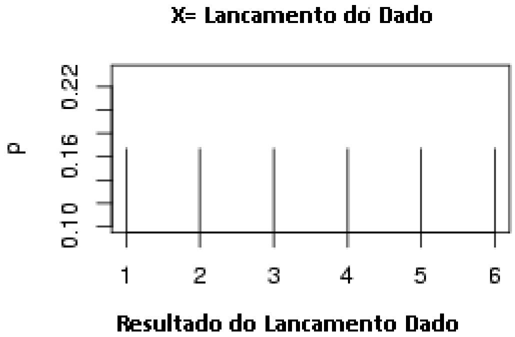


FIG. 21: Distribuição Uniforme discreta

3.6.1.2 DISTRIBUIÇÃO DE BERNOULLI

Uma variável aleatória discreta que apresenta uma distribuição de probabilidade de Bernoulli possui as seguintes características:

- Possui somente dois resultados possíveis: Sucesso ou Fracasso.
- Seja p a probabilidade de sucesso e *q* a probabilidade de fracasso, com *p + q = 1*.

Dessa forma, **X** assume os seguintes valores:

$$\begin{aligned} X = 1\ (\text{sucesso}) &\rightarrow P(X=1) = p \\ X = 0\ (\text{fracasso}) &\rightarrow P(X=0) = q = 1 - p \end{aligned}$$

E a sua função de probabilidade é dada por:

$$P(X = x) = p^x (1-q)^{1-x}$$

Sendo $E(X) = p$ e $V(X) = p.q$

Exemplo 1: Uma urna tem 30 bolas brancas e 20 verdes. Retira-se uma bola dessa urna. Seja X: nº de bolas verdes. Calcular E(X), Var(X) e determinar P(X).

Note que o termo sucesso/fracasso é apenas uma convenção para classificar os dois eventos de Bernoulli, no caso do exemplo o “sucesso” seria escolher uma bola verde e o “fracasso” seria escolher uma bola branca.

Assim temos:

$$p = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

$$q = 1 - q = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(X = x) = \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x}$$

$$\mathrm{P(Escolher\ bola\ verde)} \qquad = \mathrm{P(X=1)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1}\left(\frac{3}{5}\right)^{1-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{1}\left(\frac{3}{5}\right)^{0} = \frac{2}{5}$$

$$\mathrm{P(Não\ escolher\ bola\ verde)} = \mathrm{P(X=0)} = \left(\frac{2}{5}\right)^{0}\left(\frac{3}{5}\right)^{1-0} = \left(\frac{2}{5}\right)^{0}\left(\frac{3}{5}\right)^{1} = \frac{1}{5}$$

O valor médio ou esperança seria $\mathrm{E(X)} = \mathrm{p} = \frac{2}{5}$ e a variância seria $V(X) = \frac{2}{5} * \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$

3.6.1.2 DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL

Se repetirmos *n* vezes um evento de Bernoulli, poderemos ter de 0 a *n* sucessos, entretanto deve-se computar as diferentes combinações de sucessos. Exemplo, supomos que repetimos um experimento de Bernoulli 3 vezes (logo *n*=3), e queremos saber a probabilidade de ocorrer um "sucesso" nestas três tentativas.

Ora por Bernoulli, a probabilidade de sucesso de um evento é dado por

$$\mathrm{P(X=1)} = \mathrm{p}^{1}(1-\mathrm{q})^{1-1} = \mathrm{p}$$

Como houve dois "fracassos", sua probabilidade é dada por:

$$\mathrm{P(X=0)} = \mathrm{p}^{0}(1-\mathrm{q})^{1-0} = \mathrm{q}$$

Logo a probabilidade de haver SUCESSO ∩ FRACASSO ∩ FRACASSO, é dado por P(SUCESSO).P(FRACASSO).P(FRACASSO) uma vez que **os experimentos são eventos independentes**. Em outras palavras, o resultado de um experimento não depende do resultado do experimento anterior e este não influenciará o resultado do próximo experimento. Então:

$$\mathrm{P(SUCESSO} \cap \mathrm{FRACASSO} \cap \mathrm{FRACASSO)} = \mathrm{p.q.q} = \mathrm{p}^{1}.\mathrm{q}^{2}$$

Deve-se lembrar de que o resultado acima não é o único resultado possível para o evento "1 sucesso em 3 tentativas de Bernoulli", ainda podemos ter os seguintes resultados:

$$\mathrm{P(FRACASSO} \cap \mathrm{SUCESSO} \cap \mathrm{FRACASSO)} = \mathrm{q.p.q} = \mathrm{p}^{1}.\mathrm{q}^{2}$$

$$\mathrm{P(FRACASSO} \cap \mathrm{FRACASSO} \cap \mathrm{SUCESSO)} = \mathrm{q.q.p} = \mathrm{p}^{1}.\mathrm{q}^{2}$$

Logo nossa probabilidade total seria:

$$P(1\ sucesso\ em\ 3\ tentativas\ de\ Bernoulli) = \binom{3}{1} p^{1}.q^{2}$$

Generalizando para *n* tentativas, o número de sucesso é dado pela seguinte equação:

$$\mathrm{P(X=x)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{x}} \mathrm{p}^{\mathrm{x}}.\mathrm{q}^{\mathrm{n-x}} \quad \mathrm{n} = 1,2,3 \quad \mathrm{x} = 0,1,2,3 \ldots \text{ sendo } \mathrm{x} \leq \mathrm{n}$$

Onde X é a variável aleatória do nº de sucessos ocorridos em "n" repetições independentes do experimento do tipo Bernoulli.

Uma variável aleatória possui uma distribuição binomial somente se:

- For uma sucessão de tentativas de Bernoulli com probabilidade de sucesso *p* (e, portanto de fracasso *q=1-p*).
- A probabilidade *p* é constante ao longo de todas as tentativas
- Os experimentos de Bernoulli são independentes.

A esperança de uma distribuição binomial é dado por $\mathrm{E(X) = n.p}$ e a variância é dado por $\mathrm{V(X) = n.p.q}$

Exemplo 1: Em média 25% dos pacientes do pronto socorro do hospital de uma grande cidade não tem plano de saúde. Em uma amostra aleatória de 5 pacientes, qual é a probabilidade de que:

a) Qual é a probabilidade de que exatamente 3 dos 5 pacientes não tenham plano de saúde?
b) Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos 5 paciente não tenha plano de saúde?
c) Qual é a probabilidade de que nenhum dos 5 pacientes não tenha plano de saúde?

SOLUÇÃO:

$$\mathrm{P(X = x) = } \binom{5}{x} \frac{1}{4}^{x} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$$

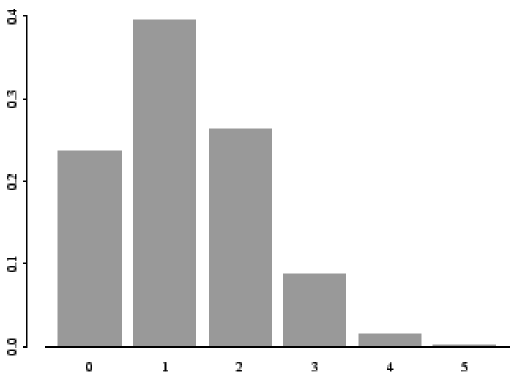


FIG. 22: Distribuição binomial X ~ b(5,0,25)

O número esperado (ou média) de pacientes sem plano de saúde é de $E(X) = n.p = 5.\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$ pacientes e a variância é dado por $V(X) = n.pq = 5.\left(\frac{1}{4}\right).\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{15}{16}$ pacientes^2, o desvio padrão é dado como $DP(X) = 0{,}96$ pacientes.

a) Qual é a probabilidade de que exatamente 3 dos 5 pacientes não tenham plano de saúde ?

$$\mathrm{P(X = 3) = } \binom{5}{3} \frac{1}{4}^{3} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3! * (5-3)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^{2} = 0{,}0879$$

b) Qual é a probabilidade de que pelo menos um dos 5 paciente não tenha plano de saúde ?

$$\mathrm{P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - } \binom{5}{5} \frac{1}{4}^{0} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-0} = 1 - \frac{5!}{0! * (5-0)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{5} = 0{,}763$$

c) Qual é a probabilidade de que nenhum dos 5 pacientes não tenha plano de saúde ?

$$\mathrm{P(X = 5) = P = } \binom{5}{5} \frac{1}{4}^{5} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5} = \frac{5!}{5! * (5-5)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{0} = 0{,}00098$$

Nota: Pode-se chegar ao mesmo resultado considerando-se *p*=0,75 dessa forma a probabilidade de SUCESSO agora seria o paciente ter um plano de saúde. Como deseja-se a probabilidade de nenhum paciente possuir plano de saúde, teríamos X=0 e assim:

$$P(X=0)=P=\binom{5}{0}\frac{3}{4}^{0}(\frac{1}{4})^{5-0}=\frac{5!}{0!*(5-0)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{5}=0{,}00098$$

3.6.1.3 DISTRIBUIÇÃO DE POISSON

Uma variável aleatória X tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, se a sua função de probabilidade é dada por:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=\mathrm{x})=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^{\mathrm{x}}}{\mathrm{x}!} \quad \mathrm{x}=0{,}1{,}2{,}3\ ...$$

A esperança de uma distribuição Poisson é dado por $\mathrm{E}(\mathrm{X})=\lambda$ e a variância é dado por $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\lambda$, logo o desvio padrão é dado por $\sqrt{\lambda}$.

O modelo Poisson é muito utilizado em experimentos físicos e biológicos onde se quer determinar a probabilidade esperada de ocorrências num determinado intervalo de tempo, ou de comprimento, área ou qualquer outra dimensão.

Podemos ter modelos de Poisson representando, por exemplo, o número de carros que atravessam uma determinada cabina de pedágio por hora, o número de problemas relatados por cliente em um novo modelo de automóvel, o número de pedidos/cliente etc.

As suposições básicas para a utilização do modelo são:

- As condições do experimento permanecem constantes no decorrer do tempo, ou seja, a taxa média de ocorrência λ é constante ao longo do tempo.
- Intervalos de tempo disjuntos são independentes, o que quer dizer que a informação sobre o número de ocorrências em um período nada revela sobre o número de ocorrências em outro período.

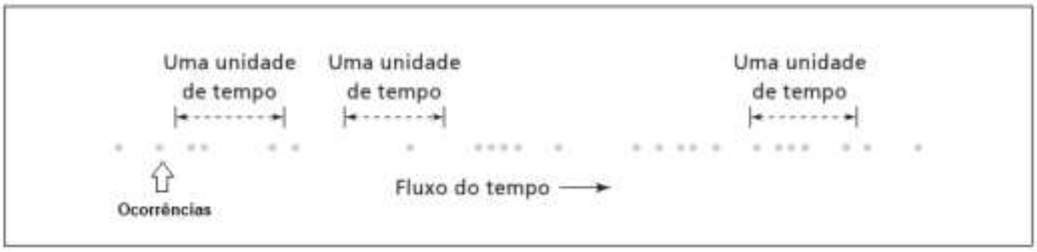


FIG. 23: O processo de Poisson

A figura abaixo descreve o histograma da distribuição de uma distribuição de Poisson com λ=4,68.

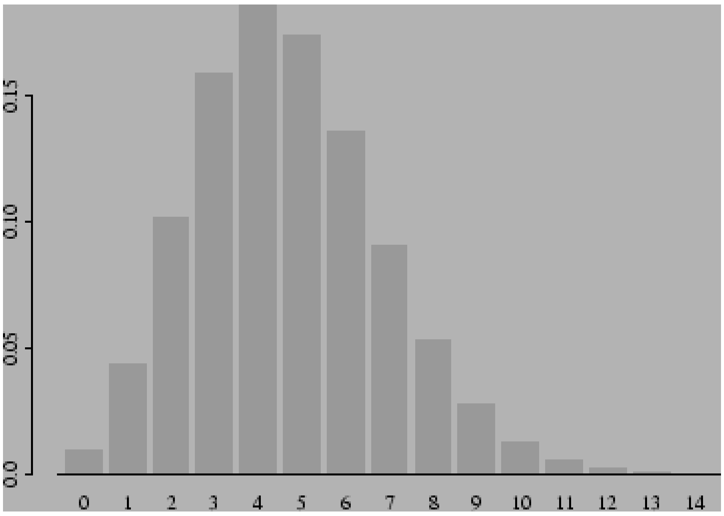


FIG. 24: Distribuição Poisson X ~ P(4,68)

Exemplo 1: Nas manhas de quintas feiras, entre 11h30min e 12h30minh na agência centro do banco ACME chegam em média 3,8 clientes por minuto, que entram em uma fila (se houver alguma) para o guichê de atendimento.

SOLUÇÃO:

a)Qual seria a probabilidade de que em determinado minuto chegue na agência mais de 3 clientes ?

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 3) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 1) - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 3)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 3) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-3,8}3{,}8^0}{0!} - \frac{\mathrm{e}^{-3,8}3{,}8^1}{1!} - \frac{\mathrm{e}^{-3,8}3{,}8^2}{2!} - \frac{\mathrm{e}^{-3,8}3{,}8^3}{3!}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 3) = 1 - 0{,}02237 - 0{,}08500 - 0{,}1615 - 0{,}2046 = 0{,}52653$$

b) Qual seria a probabilidade de que em dado minuto chegar nenhum cliente ?

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = \frac{\mathrm{e}^{-3,8}3{,}8^0}{0!} = 0{,}02237$$

c) Qual seria a probabilidade de que em dado minuto chegue na agência pelo menos um cliente ?

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 1) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) = 1 - 0{,}02237 = 0{,}9776$$

c) A maior concentração da distribuição está em torno de que valor?

$E(X) = \lambda = 3{,}8$ clientes

OBSERVAÇÕES:

I. Se o intervalo for alterado, a variável aleatória mantem a mesma distribuição de Poisson, entretanto o valor do parâmetro λ precisa ser ajustado de maneira conveniente. Para ilustrar, no exemplo 1 caso o investigador quisesse descobrir a probabilidade do número de ovos a cada 2 ninhos, λ passaria a ser $\lambda = 2.(3{,}8) = 7{,}6$.

II. $\binom{n}{x} p^x . q^{n-x} \quad \cong \quad \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Quando o número de observações ou experimentos em um processo de Bernoulli for muito grande a distribuição de Poisson é apropriada como uma aproximação das distribuições Binomiais quando:

a. $n \geq 500$
b. $np \leq 10$
c. $\lambda \leq 10$

3.6.1.4 DISTRIBUIÇÃO GEOMÉTRICA

Seja X a variável aleatória que fornece o número de falhas até o primeiro sucesso, sua distribuição de probabilidade é dada por uma distribuição Geométrica, tal que :

$$P(X = i) = (1 - p)^i p$$

Sendo $0 \leq p \leq 1$ e *i*=0,1,2,...

O evento [X=i] somente ocorre após ocorrerem fracassos nas primeiras *i* repetições e o sucesso no *(i+1)-ésimo* ensaio.
A distribuição Geométrica é uma sequência de *i+1* eventos de Bernoulli com probabilidade *p* constante de sucesso e independentes entre si.

A esperança E(X) da distribuição geométrica é dado por:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

E a sua variância V(X) é dada por :

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$$

Exemplo: Um dado é lançado e sua face observada. Seja X o número de lançamentos até que saia a face 6. Obtenha a distribuição de probabilidade de Y, μ, σ^2 e σ.

$$P(X = i) = \left(\frac{5}{6}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right) \quad \text{i=0,1,2,3....}$$

Sua esperança é dada por E(X)=6, em média a cada 6 lançamentos o número 6 aparece. Sua variância é V(X)=30 lançamentos^2, e desvio padrão de 5,48 lançamentos.

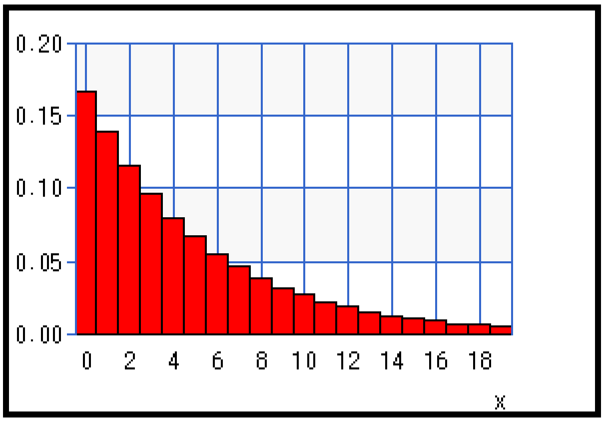


FIG. 24: Distribuição Geométrica Exemplo 1 (máx. 20 lançamentos)

PROPRIEDADE DA FALTA DE MEMÓRIA:

Uma variável aleatória com distribuição geométrica, possui falta de memória devido ao fato que as tentativas são independentes entre si. O que quer dizer que a contagem do número de tentativas até o próximo sucesso pode ser feito em qualquer tentativa. No exemplo do lançamento do dado, caso lancemos 1000 vezes o dado, a probabilidade da face virar o número 6 na tentativa 1006 é a mesma de calcularmos a probabilidade nos 6 primeiros lançamentos.

A distribuição geométrica considera que não há desgaste do sistema, ou aumento da probabilidade de que ocorra alguma falha (no caso de máquinas por exemplo, onde existe uma vida útil de operação).
Nesta caso onde é importante computar o desgaste do sistema na probabilidade resultante, utiliza-se distribuições de probabilidade que possuam memória, como a distribuição Weibull.

3.6.1.5 DISTRIBUIÇÃO HIPERGEOMÉTRICA

Seja uma série de N objetos que possuem:

K objetos classificados como sucesso
N-K objetos classificados como falhas

Seleciona-se uma amostra de *n* objetos aleatoriamente e sem reposição a partir de N objetos, em que $K \leq N$ e $n \leq N$

Seja a variável aleatória X o número de sucesso na amostra *n*. Então X é uma variável aleatória hipergeométrica cuja distribuição de probabilidade é dada por:

$$\mathrm{P(X = xi)} \quad = \quad \frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}} \text{ onde Máx(0,n-N+r)} \leq xi \leq \text{Min(r,n)}$$

A esperança E(X) da distribuição geométrica é dado por:

$$\mu = E(X) = \frac{nK}{N}$$

E a sua variância V(X) é dada por :

$$\sigma^2 = V(X) = n\frac{K}{N}\frac{N-K}{N}\frac{N-n}{N-1}$$

A distribuição hipergeométrica descreve probabilisticamente os resultados de uma sequência de eventos de Bernoulli dependentes, ou seja, o valor de *p* não é constante. Tais eventos se caracterizam por retiradas sem reposição, onde a probabilidade de sucesso se altera a cada retirada.

Exemplo:

Um jogo de loteria Megasena consiste em selecionar seis dezenas do conjunto de 60 dezenas de 01 a 60, com uma bola para cada dezena e sem reposição. Num volante (cartão aposta) o jogador pode escolher de 6 a 15 dezenas. Qual é a probabilidade de acertar-se a Megasena marcando-se 6 dezenas no volante?

Seja X o número de dezenas premiadas (sucessos) em uma amostra de tamanho n=6.

N=60
n=6
K=6
N-K= 54

Logo $P(X=6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{54}{0}}{\binom{60}{6}} =$ 1 chance em 50.063.860

A melhor chance de ganha na Megasena seria fazer um cartão de 15 pontos (agora o tamanho de nossa amostra é *n*=15), a probabilidade então seria:

N=60
n=15
K=6
N-K= 54

$P(X=6) \ = \frac{\binom{6}{6}\binom{54}{9}}{\binom{60}{15}} =$ 1 chance em 10.002,8 ~ 1 chance 10.003

Dividindo-se a probabilidade de jogar na Megasena com uma aposta de 15 dezenas e com uma aposta de 6 dezenas temos,

$$Q = \frac{50.063.860}{10.003} \sim 5005$$

O valor atual de um cartão de 6 dezenas da Megasena é de R$ 2,5 e de um cartão com 15 dezenas de R$ 12.512,50, exatamente Q vezes mais caro que a aposta mínima.

Desta forma, jogando-se 5005 cartões diferentes de 6 dezenas ou um cartão de 15 dezenas, a probabilidade de ganhar na Megasena é a mesma, pois $C_6^{15} = 5005$.

LISTA DE EXERCÍCIOS

Exercício 1. Em famílias com quatro crianças, admite-se que a probabilidade de nascer homem ou mulher seja de 50% cada uma. Seja X a variável aleatória "número de meninas em famílias com quatro crianças"
a)Defina o espaço amostral.
b)Quais os valores que X pode assumir, calcule a probabilidade para cada um desses valores.
c)Qual o número esperado de meninas em uma família de 4 crianças ?
d)Qual o desvio padrão desse numero esperado ?

Exercício 2. Uma empresa exporta máquina do tipo I com probabilidade 0,20, do tipo II com probabilidade 0,36, do tipo III com probabilidade 0,28 e do tipo IV com probabilidade 0,16. Sabendo-se que o lucro por máquina do tipo I é de 10.000 reais, do tipo II é de 30.000 reais, do tipo III é 20.000 reais e do tipo IV é de 15.000 reais, qual é o lucro médio esperado a variância e o desvio padrão ao exportar essas máquinas? Qual seria o lucro médio esperado se haver um aumento de 30% no lucro que vinha sendo auferido e a inclusão de uma taxação pelo país importador de 2000 reais ? Dica: use as propriedades da esperança e da variância para a 2ª pergunta.

Exercício 3. Os prêmios e as proporções de bilhetes de uma loteria são:

Prêmios	R$ 5	R$ 25	R$ 100
% de bilhetes	80	15	5

a)Qual a esperança matemática de gasto do banqueiro?
b)Qual o preço mínimo do bilhete se pretende ganhar pelo menos R$ 20.000 com a venda de 10.000 bilhetes?

Exercício 4. Das variáveis abaixo descritas, assinale quais são binomiais, e para essas de os respectivos campos de definição e função de probabilidade. Quando julgar que a variável não é binomial, aponte as razões de sua conclusão:
a)De uma urna com 10 bolas brancas e 20 pretas, vamos extrair, com reposição, cinco bolas. X é o número de bolas brancas nas cinco extrações.
b)Refaça o problema anterior, mas dessa vez as n extrações são sem reposição.
c)Temos 5 urnas com bolas pretas e brancas e vamos extrair uma bola de cada urna. Suponha que X seja o número de bolas brancas obtidas no final.
d)Vamos realizar uma pesquisa em 10 cidades brasileiras, escolhendo ao acaso um habitante de cada uma delas e classificando-o em pró ou contra um certo projeto federal. Suponha que X seja o número de indivíduos contra o projeto no final da pesquisa.
e)Em uma indústria existem 100 maquinas que fabricam determinada peça. Cada peça é classificada como boa ou defeituosa. Escolhemos ao acaso um instante de tempo e verificamos uma peça de cada uma das máquinas. Suponha que X seja o número de peças defeituosas.

Exercício 5. A probabilidade de que certos pais com olhos azuis escuros tenham filhos com olhos da mesma cor é de 1/4. Se houver 6 filhos na família, qual a probabilidade de que, pelo menos, metade das crianças tenham olhos azuis escuros?

Exercício 6. Um fotógrafo negocia com o jornal o seguinte trato: ele submete algumas fotos semanalmente e por cada foto publicada, ele ganha R$ 50,00; se a foto não for publicada, ele não ganha nada. Nesta semana 4 fotos são submetidas com cada uma tendo probabilidade 0,60 de ser publicada, independentemente das demais.
a)Calcule a distribuição de probabilidade de Y: montante que o fotógrafo recebe esta semana;

b)Qual a probabilidade que o fotógrafo tenha pelo menos duas fotos publicadas esta semana?
c)Calcule o ganho esperado do fotógrafo nesta semana.

Exercício 7. O número de leituras enviadas, durante uma hora, por um satélite para um centro de meteorologia, é uma variável aleatória de Poisson de média 5 (envios por hora). Calcule:
a)A probabilidade de que 5 mensagens sejam enviadas por hora;
b)A probabilidade de que pelo menos 2 mensagens sejam enviadas em meia hora.

Exercício 8. Numa central telefônica, o número de chamadas chega segundo uma distribuição de Poisson, com média de oito chamadas por minuto. Determinar qual a probabilidade de que se tenha:
a)Duas ou mais chamadas em um minuto;
b)Menos que três chamadas em um minuto;
c)Entre sete (inclusive) e nove (exclusive) chamadas em um minuto;
d)Mais que duas chamadas em 30 segundos.

Exercício 9. Em um hotel de luxo, 20% dos clientes pagam com Amex. Dos próximos 10 clientes:
a)Qual a probabilidade que nenhum pague com cartão de crédito Amex ?
b)E ao menos dois ?
c)E menos de 3 ?
d)Qual o número esperado de clientes que pagam com Amex ?
e)Qual o desvio padrão ?

Exercício 10. Num determinado processo de fabricação, 10% das peças são consideradas defeituosas. As peças são acondicionadas em caixas com 5 unidades cada uma.
Então:
a)Qual a probabilidade de haver exatamente 3 peças defeituosas numa caixa?
b)Qual a probabilidade de haver duas ou mais peças defeituosas numa caixa?
c)Se a empresa paga uma multa de R$10,00 por caixa em que houver alguma peça defeituosa, qual o valor esperado da multa num total de 1000 caixas?

Exercício 11. 10.000 unidades de Smartphones com S.O. Android são expedidos em uma determinada remessa. Antes que a remessa seja aprovada, um inspetor escolhe aleatoriamente 30 smartphones. Assuma que existem 15 smartphones, e que mesmo a inspeção sendo sem reposição, o numero total de telefones é suficientemente grande pra ser considerado infinito, e portanto p possa ser considerado constante. Se um smartphone com defeito é encontrado, a remessa inteira é inspecionada.
Qual a probabilidade de que o controle de qualidade aponte para a inspeção total?

Exercício 12. Uma seguradora estipula um valor máximo para cobertura de seus clientes. Com base em dados históricos, sabe-se que o número de ocorrências semanais que implicam no valor de cobertura máxima segue distribuição de Poisson, com média de uma ocorrência por semana. Sempre que o número de 'coberturas máximas' em uma semana é igual ou maior que quatro, a seguradora não tem recursos para pagar seus clientes, tendo como única saída recorrer a uma re-seguradora (seguradora que tem como clientes outras seguradoras).
a)Para uma semana qualquer, qual a probabilidade de a seguradora ter de recorrer à sua re-seguradora pelo motivo apresentado no enunciado?
b)Considerando que um ano tenha 52 semanas e que se esteja interessado em estudar o número de semanas em que a seguradora recebe quatro ou mais ocorrências com cobertura máxima. Identifique a distribuição dessa variável aleatória e, com base nas propriedades dessa distribuição, determine o número esperado de semanas com quatro ou mais ocorrências.

Exercício 13. Uma indústria de tintas recebe pedidos de seus vendedores através de fax, telefone e internet. A taxa média é de 5 pedidos por hora.
a)Qual a probabilidade da indústria receber mais de dois pedidos por hora?
b)Digamos que, no horário do almoço, a indústria fica impossibilitada de atender a mais de dois pedidos por hora. Você acha que deveria aumentar o nº de atendentes
nesse período?
c)Em um dia de trabalho (8 horas) qual seria a probabilidade de haver 50 pedidos? A indústria deveria aumentar o nº de atendentes para receber mais de 50 pedidos por dia?

3.6.2. DISTRIBUIÇÕES CONTÍNUAS

3.6.2.1 A DISTRIBUIÇÃO UNIFORME CONTÍNUA

Uma v.a. X é uniformemente distribuída em $1 \leq x \leq b$ (X ~ U(a,b)) se sua f.d.p. for:

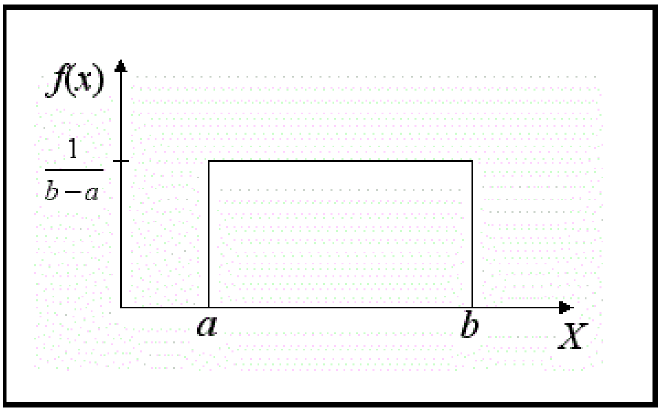


FIG. 25: Distribuição uniforme contínua U(a,b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & c/c \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

3.6.2.2 A DISTRIBUIÇÃO GAUSSIANA OU DISTRIBUIÇÃO NORMAL

O modelo de distribuição gaussiana é uma das distribuições de probabilidade mais importantes pois sua distribuição de frequência representa muitos fenômenos da natureza como por exemplo medidas antropométricas. Algumas características da distribuição normal:

1. Poder de modelamento. Medidas produzidas em diversos processos aleatórios seguem a distribuição normal.
2. Capacidade de aproximação de outras distribuição como Binomial e Poisson.
3. As distribuição de estatísticas da amostra frequentemente seguem a distribuição normal independente da distribuição da população.

Uma função gaussiana ou normal é uma v.a. X ~ N(μ, σ^2) se sua f.d.p for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty \leq x \leq +\infty; -\infty \leq \mu \leq +\infty;\ \sigma > 0$$

1. $f(x) > 0 \quad x \in \Re$

2. f(x) é crescente para $x \in (-\infty, \mu)$ e decrescente para $x \in (\mu, +\infty)$.

3. Ponto de máximo da função em x = μ. Então μ é também a moda da distribuição.

4. f(x) é simétrica em relação a μ.

5. Valor esperado E(x): μ

6. Variância V(X): σ^2

7. A área da curva correspondente entre:
(μ - σ) e (μ + σ) = 68,27%
(μ - 2 σ) e (μ + 2 σ) = 95,45%
(μ - 3 σ) e (μ + 3 σ) = 99,73%

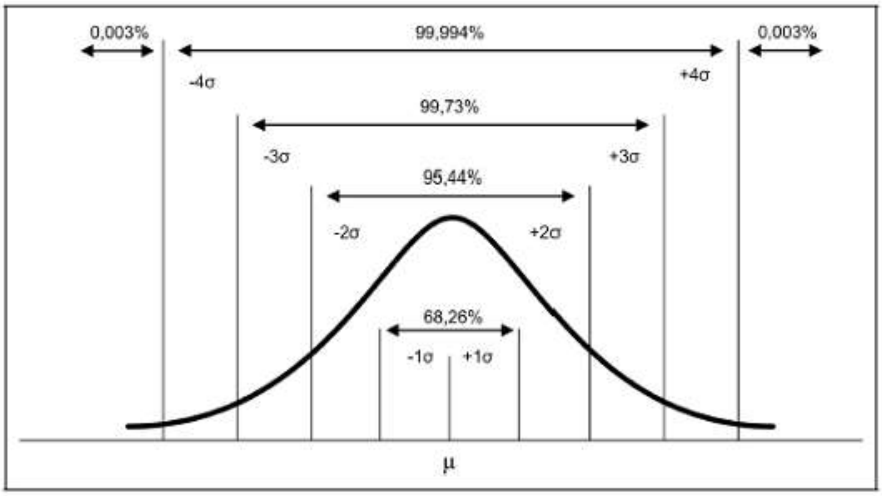


FIG. 26: Distribuição normal X ~ N(μ, σ^2)

Exemplo 1: Construa uma distribuição normal com μ = 20 e σ = 2 e determine a probabilidade de se encontrar valores entre:

a) 18 e 22
b) 20 e 24

3.6.2.2.1 DISTRIBUIÇÃO NORMAL REDUZIDA:

Quando μ = 0 e σ^2 = 1 (caso particular) a distribuição gaussiana é denominada distribuição normal "standard", normalizada, ou padrão:

$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

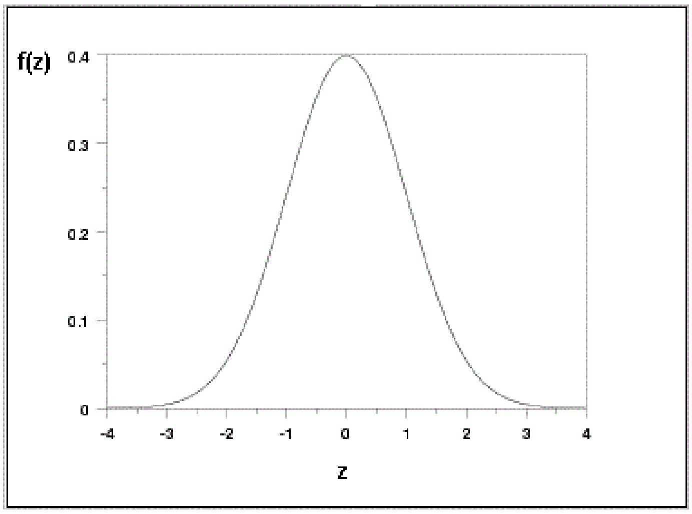
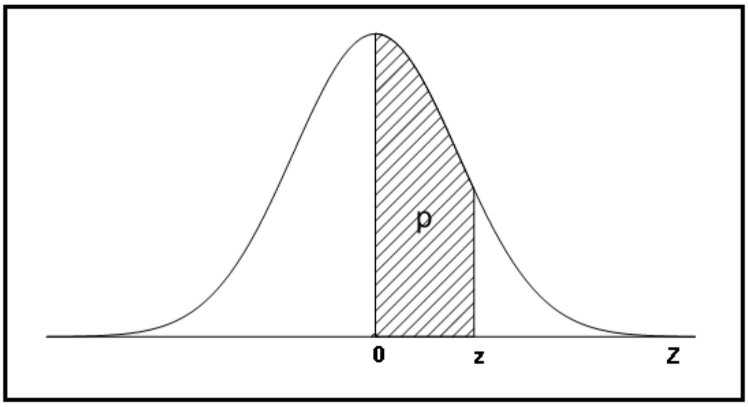


FIG. 26: Função de densidade de probabilidade de X ~ N(0,1)

Exemplo 1: Determine a área limitada pela curva normal em cada um dos casos:

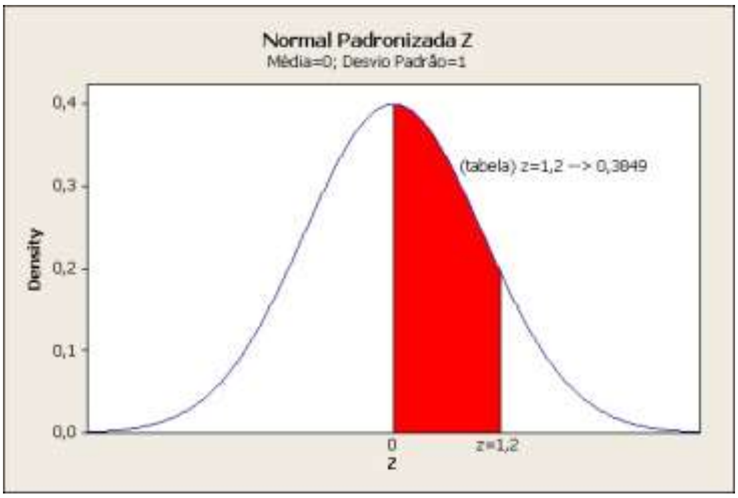
SOLUÇÃO:

Utilizaremos na solução dos problemas a tabela Z (distribuição normal padronizada), onde a área dada pela tabela é área debaixo da curva do intervalo [0;z].



a. $0 \leq Z \leq 1{,}2$

Graficamente:



Na tabela:

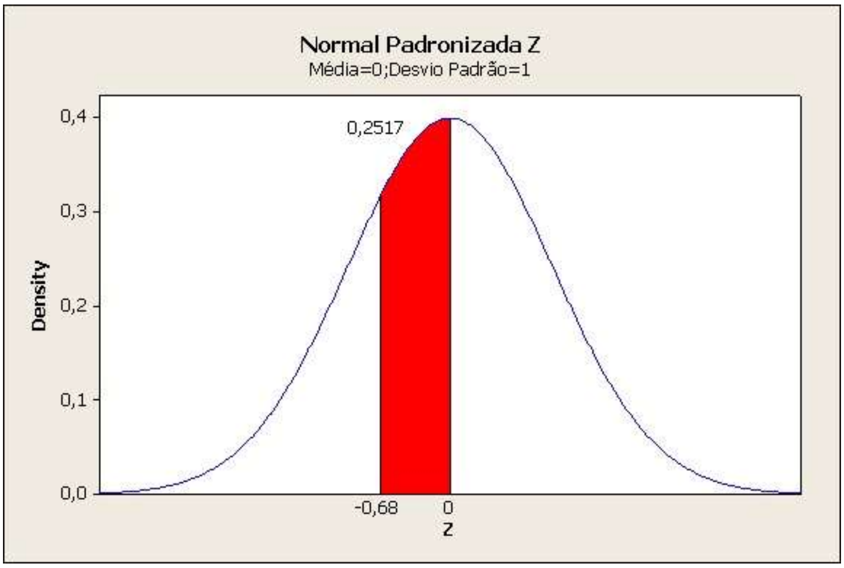
Distribuição Normal

1,2 + 0,00 = 1,20

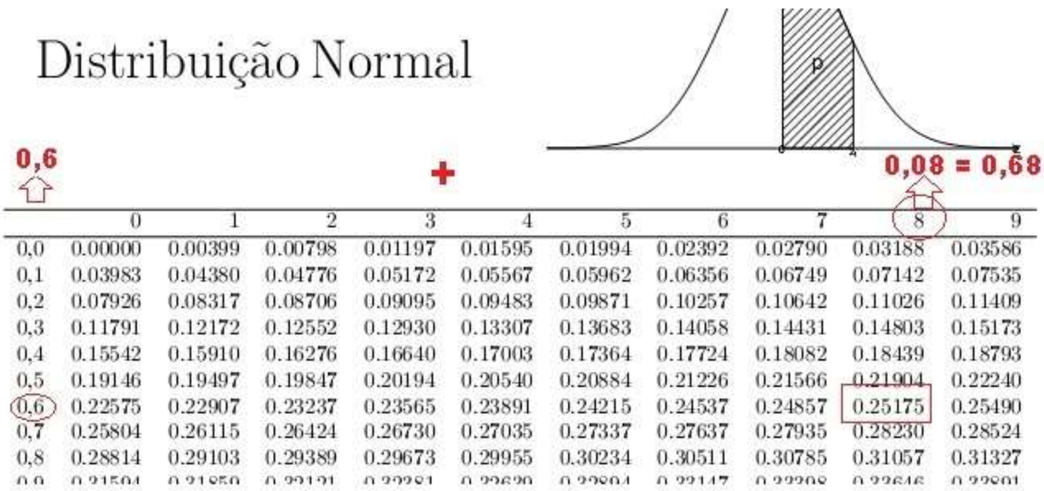
	0	1	2	3	4	5	6
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543
1,1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698
1,2	$\boxed{0.38493}$	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617
1,3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309
1,4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785
1,5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062
1,6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154

b. -0,68 ≤ Z ≤ 0

Como a distribuição é simétrica, os valores de probabilidade serão o mesmo independente do sinal quando um dos limites é o zero, assim P(-0,68 ≤ Z ≤ 0) = P(0 ≤ Z ≤ 0,68), assim:



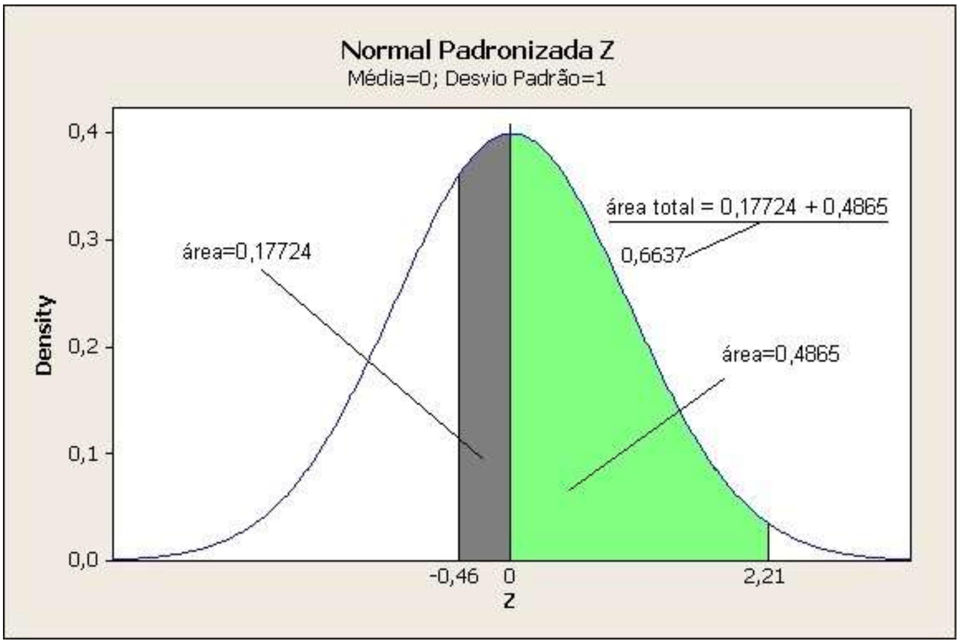
Na tabela:



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327

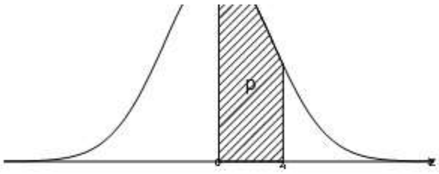
c. $-0,46 \leq Z \leq 2,21$

Quando o intervalo contem o zero, basta somar as duas áreas da tabela de acordo com o gráfico:



Na tabela:

Distribuição Normal



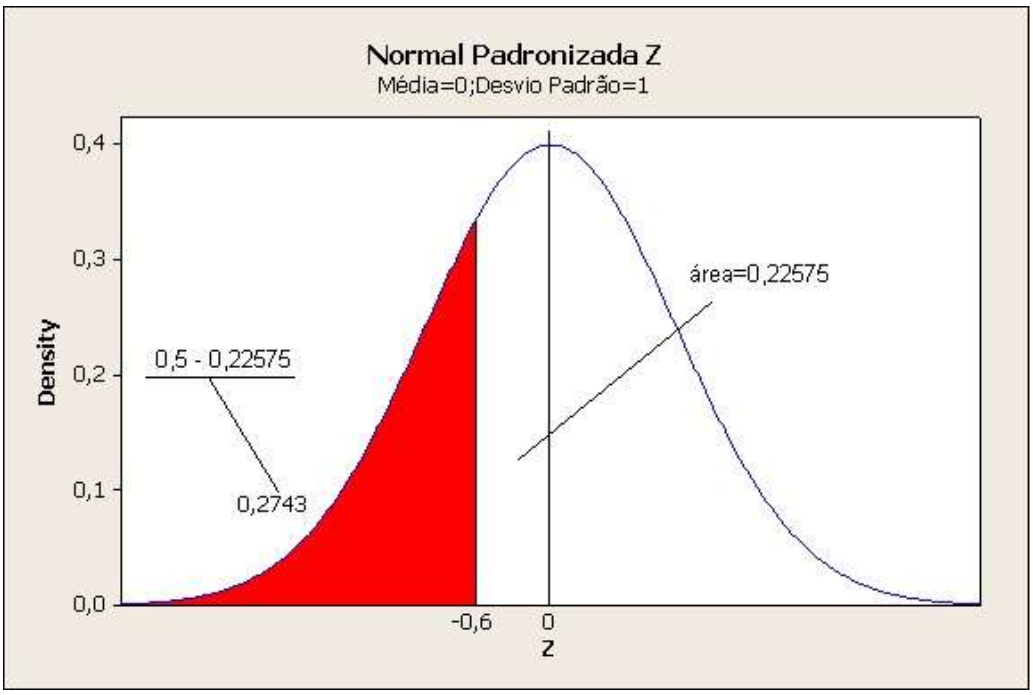
área total = 0,4865 + 0,17224 = 0,6637

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	$\boxed{0.17724}$	0.18082	0.18439	0.18793
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1,1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1,2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1,3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1,4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1,5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1,6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1,7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1,8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1,9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2,0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2,1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2,2	0.48610	$\boxed{0.48645}$	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2,3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158

d. Z ≤ -0,6

Neste caso devemos tomar cuidado pois um dos limites do intervalo é $-\infty$ ou $+\infty$. Logo devemos subtrair o resultado que encontramos na tabela de 0,5. Lembre-se que a área da metade esquerda da curva tem valor 0,5 e a outra metade tem igualmente valor 0,5.

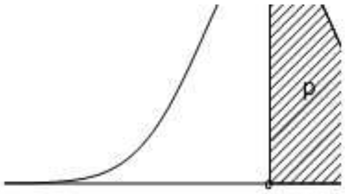
Graficamente:



Da tabela:

Distribuição Normal

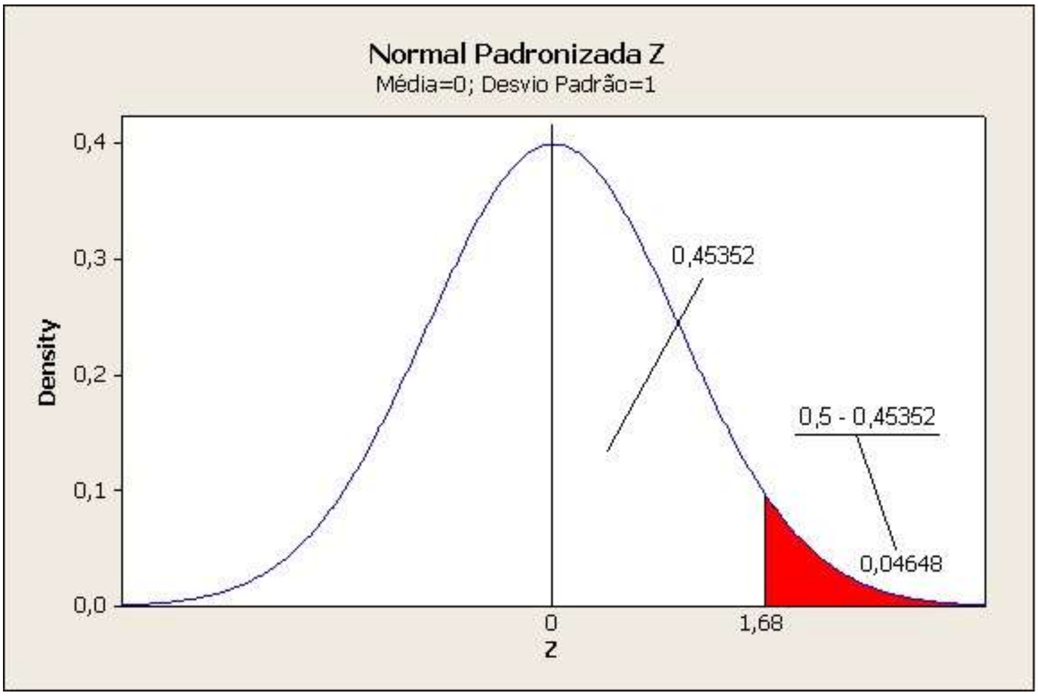
0,5 - 0,22575=0,2743



	0	1	2	3	4	5	6	7
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566
0,6	$\boxed{0.22575}$	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769
1,1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900

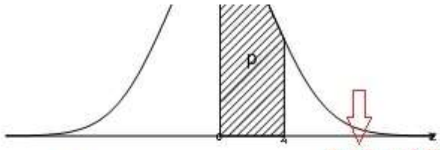
e. Z ≥ 1,68

Da mesma forma que o item d.



Da tabela:

Distribuição Normal



0,5 - 0,45352 = 0,04648

1,6

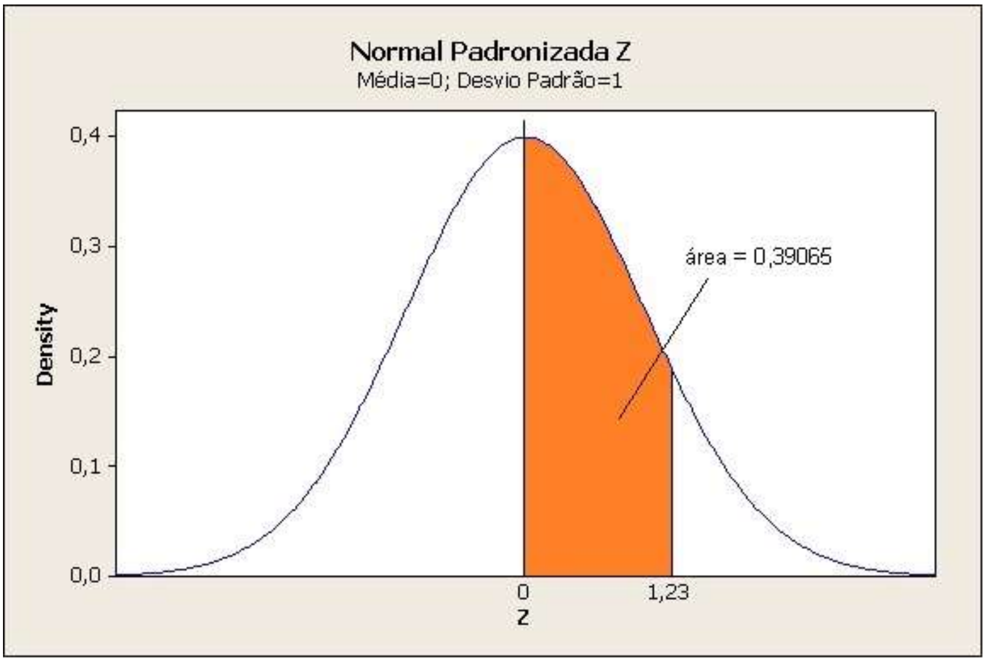
\+

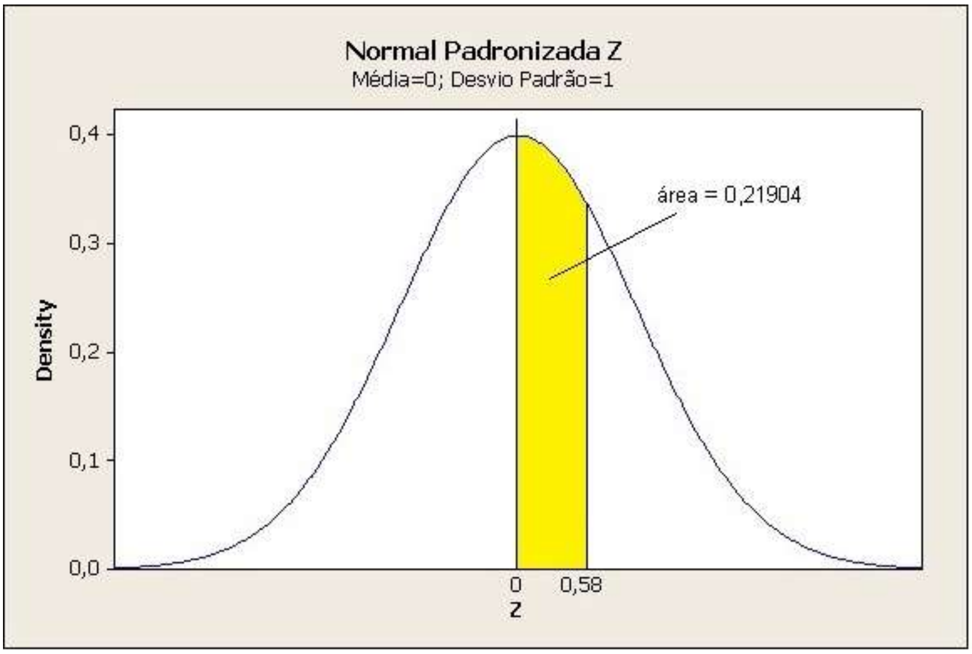
0,08 = 1,68

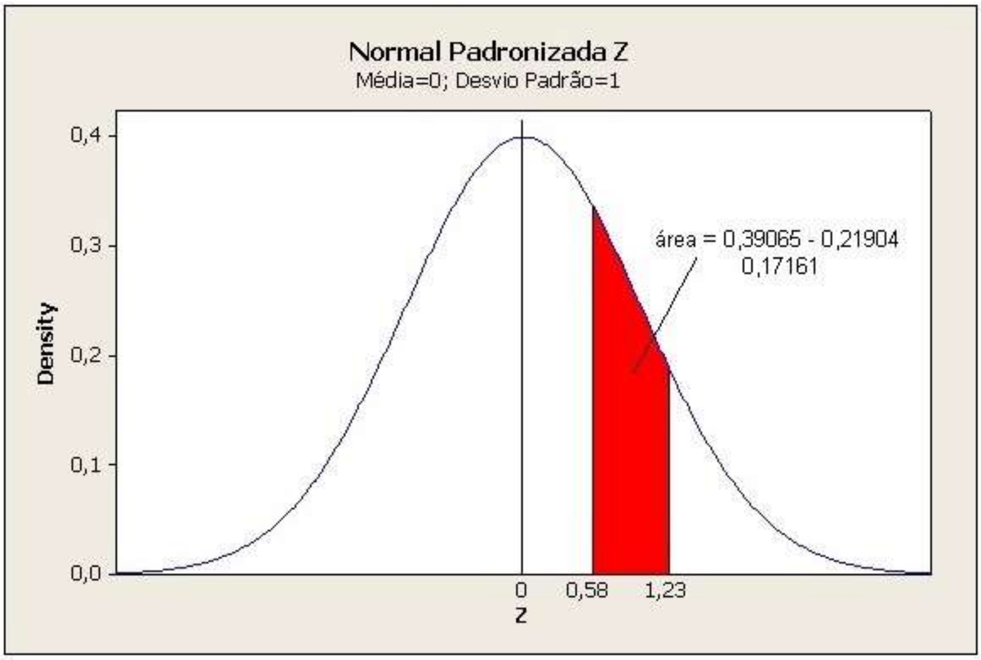
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1,1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1,2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1,3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1,4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1,5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1,6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1,7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1,8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1,9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670

f. $0,58 \leq Z \leq 1,23$

Quando o intervalo não cruza o zero e tem tamanho finito, devemos subtrair a área maior da área menor.



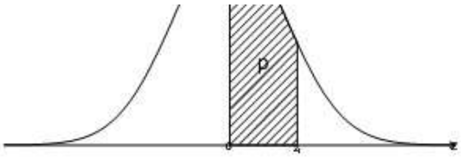

Normal Padronizada Z
Média=0; Desvio Padrão=1
Density
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
área = 0,21904
0
0,58
Z


Normal Padronizada Z
Média=0; Desvio Padrão=1
Density
0,4
0,3
0,2
0,1
0,0
área = 0,39065 - 0,21904
0,17161
0
0,58
1,23
Z

Da tabela:

Distribuição Normal

área = 0,39065 - 0,21904 = 0,17161



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0,1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0,2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0,3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0,4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0,5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	$\boxed{0.21904}$	0.22240
0,6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0,7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0,8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0,9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1,0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1,1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1,2	0.38493	0.38686	0.38877	$\boxed{0.39065}$	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1,3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41309	0.41466	0.41621	0.41774
1,4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1,5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1,6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1,7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1,8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062

A lógica é idêntica se o intervalo não cruza o zero, é finito e se encontra à esquerda do zero. Tente achar a área compreendida no intervalo $-1{,}78 \leq Z \leq -0{,}55$. O resultado é 0,2536.

A figura abaixo representa a função de distribuição acumulada F(z) para a distribuição gaussiana reduzida, que é dado por:

$$\mathrm{F(z)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{z}^2}{2}} \mathrm{dx}$$

Uma das propriedades de uma função de distribuição acumulada é que seu valor tende a zero quando seu valor tende a menos infinito e tende a unidade quando seu valor tende a mais infinito. Perceba na figura abaixo que quando o valor de z→–∞ o valor de F(z)→0 e quando o valor de z→+∞ o valor de F(z)→1.

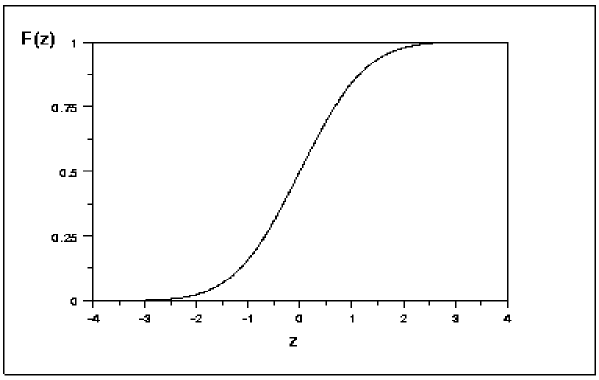


FIG. 27: Função de distribuição F(X) de X ~ N(0,1)

3.6.2.2.2 A APROXIMAÇÃO DA BINOMIAL PELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Pode-se utilizar a distribuição normal com relativa precisão quando a distribuição binomial apresenta certas características, descritas abaixo. O uso normal é útil em alguns casos, por exemplo quando o valor do parâmetro *n* muito grande, dependendo do valor do intervalo cuja probabilidade queremos calcular, o uso da normal requer muito menos cálculo matemático.

A aproximação da binomial pela distribuição normal é valida quando :

a. $n * p > 5$
b. $n * (1 - q) = nq > 5$
c. O valor de *p* não é muito próximo de 1 ou de zero.

Por exemplo, se um determinado experimento for modelado por uma distribuição binomial de *n=500* e p=0,40 (n*p=200 > 5). Torna-se tedioso calcular a probabilidade por exemplo de $P(180 < X < 220)$, pois teríamos que somar todas as ocorrências entre P(Xi=181) até P(Xi=219).

Neste caso torna-se mais produtivo utilizar a distribuição normal, calcula-se o valor de X relativos a uma distribuição normal com mesma média E(x) e variância V(X) da distribuição binomial.

Portanto nossa normal seria $X \sim N(\mu, \sigma^2) = N(np, npq) \rightarrow N(200{,}120)$, e:

$$P(180 < X < 220) = P\left(\frac{180 - 200}{\sqrt{120}} \leq X \leq \frac{220 - 200}{\sqrt{120}}\right) = P(-1{,}83 \leq Z \leq 1{,}83) \cong= 0{,}9328$$

Para efeito de comparação, caso usássemos a soma dos valores de P(X=Xi) no intervalo definido usando a distribuição binomial:

$$P(180 < X < 220) = \sum_{i=181}^{219} \binom{500}{x_i} (0{,}4)^{x_i} (0{,}6)^{500 - x_i} \cong 0{,}9388$$

Nota-se que a aproximação possui boa precisão.

Em alguns casos, para corrigir os desajustes causados pela sobreposição de uma “área” dada por uma distribuição discreta (binomial) e uma distribuição contínua (normal) é necessário um ajuste de continuidade nos intervalos da distribuição normal. Dessa forma o valor de X da binomial passa a ser, ao utilizar-se a aproximação pela normal, um intervalo onde o valor de X é o ponto médio de [X-0,5;X+0,5].

Alguns exemplos de cálculo do intervalo da normal usando o ajuste de continuidade para X=5 sendo portanto o ponto médio do intervalo [4,5;5,5]:

Enunciado da Binomial	Resolução via Normal
$p(X = 5)$	$P(4{,}5 \leq X \leq 5{,}5)$
$p(X \geq 5)$	$P(X \geq 4{,}5)$
$p(X > 5)$	$P(X \geq 5{,}5)$
$p(X < 5)$	$P(X \leq 4{,}5)$

Fica como exercício para o leitor calcular os valores de probabilidade de uma v.a. $X \sim b\left(10; \frac{1}{2}\right)$ (binomial com parâmetros *n*=10 e *p*=0,5) utilizando a aproximação para uma normal:

a. $P(8 < X \leq 10)$ c. $P(X < 6)$

b. $P(X \leq 6)$ d. $P(X = 4)$

Os valores exatos para as probabilidades acima usando-se a distribuição binomial são 0,0547, 0,8282, 0,6231 e 0,2051 respectivamente.

Compare usando a aproximação pela normal com e sem ajuste de continuidade e perceba que neste caso a aproximação é melhor com o uso do ajuste de continuidade.

De um modo geral, o ajuste de continuidade pode ser ignorado para valores de *p* ente 0,30 e 0,75 se o valor de *n* for maior ou igual a 400.

A figura abaixo mostra o exemplo de uma distribuição binomial e sua distribuição normal aproximada, perceba que a as áreas resultantes são, a menos das descontinuidades da distribuição binomial, equivalentes.

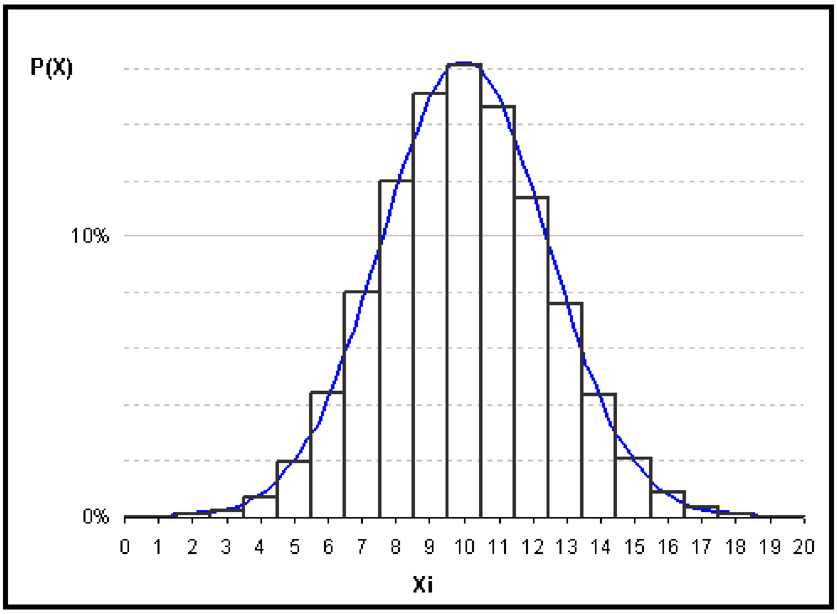


FIG. 28: X~b(25;0,4) e aproximação pela normal X~(10,6)

3.6.2.3 A DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

Uma variável aleatória contínua X, assumindo valores em $\Re^{+}$ segue o modelo exponencial com parâmetro $\lambda > 0$ se sua f.d.p é :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0; \\ 0 & c/c \end{cases}$$

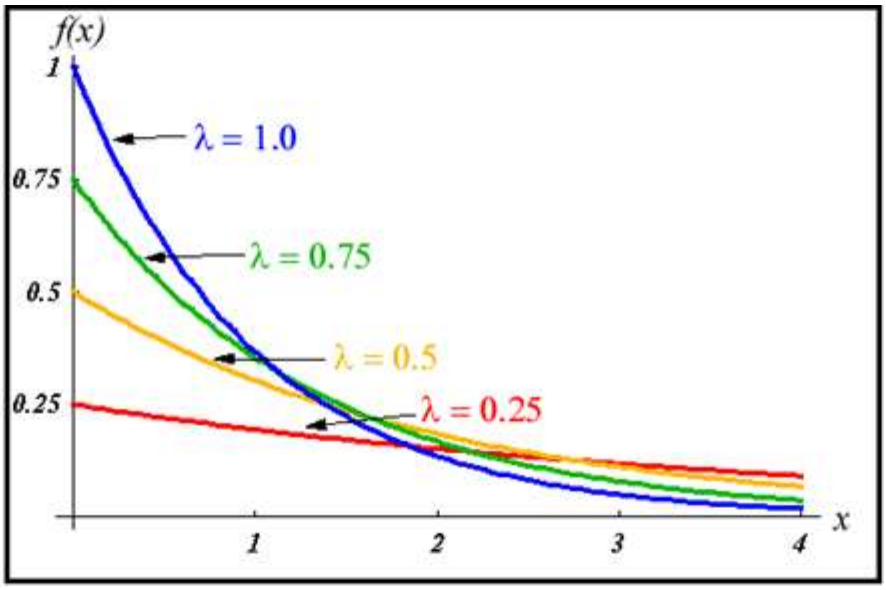


FIG. 28: Distribuição exponencial com diferentes valores de λ

A figura acima mostra distribuições exponenciais para diferentes valores de λ. A distribuição exponencial é muito útil para se descrever o tempo que se leva para completar uma tarefa ou tempo de duração de um equipamento. Alguns exemplos de fenômenos ou eventos aleatórios que podem ser modelados pela distribuição exponencial:

a.Tempo para realizar uma prova de estatística.

b.Tempo de chegadas de pacotes em um roteador.

c. Tempo de vida de certos equipamentos ou materiais que não se desgastam ao longo do tempo como por exemplo, óleos isolantes e dielétricos

d.Tempo de espera ou chegada de clientes em restaurantes, caixas de banco, postos de saúde

Os valores de E(X) e V(X) para a distribuição exponencial são :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

É importante destacar que se e o número de ocorrências de um processo de contagens segue a distribuição Poisson(λ), então as variáveis aleatórias "Tempo até a primeira ocorrência" e "Tempo entre quaisquer ocorrências sucessivas" do referido processo têm distribuição Exp(λ) com o tempo médio entre ocorrências dado por $\frac{1}{\lambda}$.

Por exemplo se o evento "número de automóveis passando por uma praça de pedágio por hora", cujo valor médio é 10 carros/hora seguir uma distribuição de Poisson com $\lambda = 10$ carros/hora, o evento "intervalo de chegada entre um carro e o próximo na praça de pedágio em horas" é dado por uma distribuição exponencial de valor médio $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 0{,}1$ horas com variância $E(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 0{,}01$ horas.

O cálculo da probabilidade de uma f.d.p exponencial é dado por:

$$P(a < x < b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-ax} - e^{-bx}$$

Logo sua função de distribuição acumulada é dada por(basta fazer a=0):

$$P(0 < x < b) = P(X \le a) = \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-bx}$$

3.6.2.3.1 AUSÊNCIA DE MEMÓRIA DE UMA DISTRIBUIÇÃO EXPONENCIAL

A distribuição exponencial não possui memória. Para explicar o conceito de falta de memória, imagine que o tempo de vida útil de um equipamento qualquer segue uma distribuição exponencial com média de 120 meses.

Caso não aconteça nenhuma falha no centésimo mês de uso de vida do equipamento, a probabilidade de acontecer uma falha nos próximos 2 meses é a mesma caso se desejasse saber, ao adquirir o equipamento, a probabilidade de acontecer uma falha no segundo mês de uso.

Matematicamente:

$$P(X > s + t | x > s) = \frac{P(X > s + t)}{P(X > s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}$$

$$P(X > s + t | x > s) = p(X > t)$$

Exemplo 1: Um componente eletrônico, de marca “A”, tem duração de vida que segue uma Distribuição Exponencial com vida média de 100 horas e um custo unitário de R$10,00. A marca “B”, desse componente eletrônico, tem uma vida média de 200 horas e um custo de R$15,00. Considere também a incidência de um custo adicional de R$8,00 se o componente durar menos de 200 horas, qualquer que seja a marca. Qual a marca mais econômica ?

SOLUÇÃO:

A marca “A” tem uma distribuição X~e(1/100) e a marca “B” uma distribuição Y~(1/200).
Lembre-se que o parâmetro λ é dado por número de ocorrências por unidade de tempo, assim para o caso da marca “A” se a vida média é de 100h, trocamos 0,01 componente a cada hora.

<u>Custo esperado da marca A:</u>

$$\begin{aligned}
E(C_A) &= 10 \cdot P(T_A \ge 200) + (10+8) \cdot P(T_A < 200) = \\
&= 10.e^{-(1/100).200} + (10+8).(1 - e^{(1/100).200}) = \\
&= 10.e^{-2} + 18(1 - e^{-2}) = 1{,}353 + 15{,}565 = 16{,}918.
\end{aligned}$$

<u>Custo esperado da marca B:</u>

$$\begin{aligned}
E(C_B) &= 15 \cdot P(T_B \ge 200) + (15+8) \cdot P(T_B < 200) = \\
&= 15.e^{-(1/200).200} + 23.(1 - e^{-(1/200).200}) = \\
&= 15.e^{-1} + 23.(1 - e^{-1}) = 5{,}518 + 14{,}539 = 20{,}057.
\end{aligned}$$

Logo a marca “A” é a mais econômica.

Para o caso de equipamentos cujo desgaste ao longo do tempo tem influência na probabilidade de ocorrência de falha, a distribuição exponencial não é a mais adequada, uma vez que não possui memória.

Uma distribuição apropriada seria a distribuição Weibull. Com o nome do inventor, Waloddi Weibull, esta distribuição é usada extensivamente em engenharia da confiabilidade, análise de sobrevivência e em outras áreas devido a sua versatilidade e simplicidade.

A sua f.d.p é dada pela seguinte equação :

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} \qquad x > 0, \beta > 0, \alpha > 0$$

Onde α é o parâmetro de escala e β é o parâmetro de forma.

Quando β=1,a função densidade de probabilidade equivale à função distribuição exponencial. Nesse caso, a taxa de falhas é constante e as falhas ocorrem de forma aleatória.

Perceba que para diferentes parâmetros de α e β a curva da f.d.p. se modifica, tal flexibilidade tem grande utilidade no estudo de probabilidade de tempos de falhas de equipamentos submetidos a desgaste.

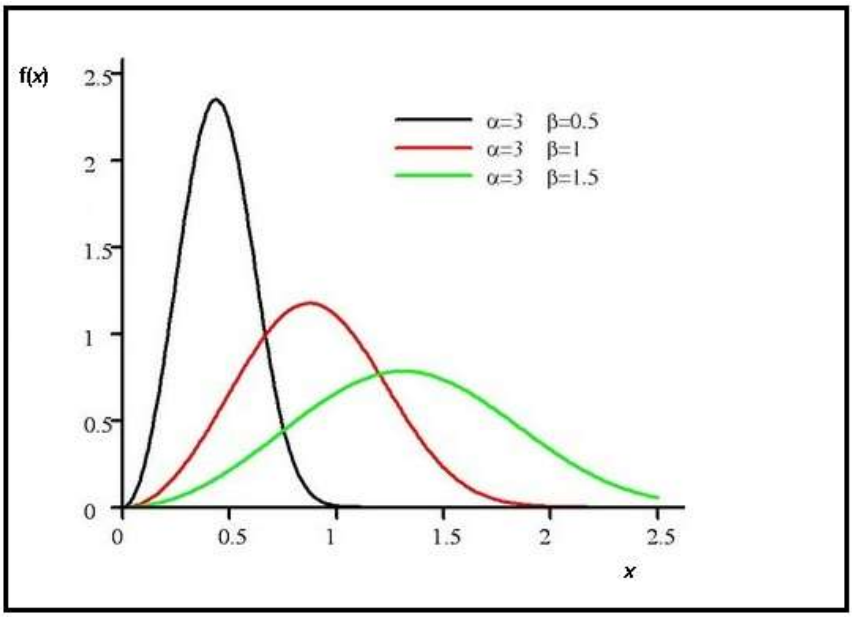


FIG. 30: A distribuição de Weibull

A tabela abaixo é um resumo comparativo entre variáveis aleatórias discretas e contínuas.

	Variável aleatória discreta	**Variável aleatória contínua**
Definição	Variável assume valores definidos em um conjunto enumerável finito ou infinito. Ex. Número de filhos em uma família, número de peças com defeito em um lote, etc..	Variável assume valores infinitos para um determinado intervalo. Ex. Altura de homens, peso de recém-nascidos, tempo de reação de um medicamento, medida de vazão de determinado reservatório etc..
Propriedades do modelo probabilístico da variável aleatória	1. $\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{P(x_i)} = 1$: a soma da probabilidade de todas as ocorrências x_i é igual a 1. 2**.** $\boldsymbol{P(X = x_i) \geq 0}$: a probabilidade da ocorrência x_i é maior ou igual a zero, não existe probabilidade negativa.	**1.** $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f_X(x)} = 1$:a área da curva definida pela função de densidade de probabilidade (f.d.p.) $f_x(x)$ é igual a 1 no intervalo $[-\infty; +\infty]$ 2. $\boldsymbol{f_x(x_i) \geq 0}$: o valor de $f_x(x_i)$ é maior ou igual a zero, a função não assume valores negativos.
Função discreta de probabilidade / Função densidade de probabilidade / Função de distribuição de probabilidade	A **função discreta de probabilidade** atribui a cada valor da variável aleatória X a sua probabilidade assim: $$\mathrm{P(X = x_i) = Prob(x_i)}$$ A **função de distribuição de probabilidade ou função acumulada** de uma da variável aleatória discreta *X* é calculada pelas seguinte expressão: $$\mathrm{F(x_i) = Prob(X \leq x_i)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{x_i}} \mathrm{P(X = x_i)}$$	Observe que a **função densidade de probabilidade** $\boldsymbol{f_X(x)}$ não é uma probabilidade, mas sim uma função matemática que nos auxilia na atribuição de probabilidades. O cálculo da probabilidade para variáveis contínuas é sempre realizado sobre intervalos, a probabilidade de ocorrência de um valor isolado é sempre zero. Assim para determinar a probabilidade de determinada ocorrência definida pelo intervalo (*a*,*b*), calculamos a área definida pelo curva neste intervalo. Logo: $$\mathrm{Prob(a \leq x \leq b)} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f_X(x)dx}$$ A **função de distribuição de probabilidade ou função acumulada** de uma da variável aleatória contínua *X* é calculada pelas seguinte expressão:

		$F(x_i) = Prob(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f_X(x)dx$
Valor Esperado (média)	$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$	$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)dx$
Variância	$Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)^2\, P(X = x_i)$ ou $Var(X) = \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\, P(X = x_i) - \mu_X^2$	$Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2\, f_X(x)dx$ ou $Var(X) = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, f_X(x)dx - \mu_X^2$
Modelos	Alguns exemplos de **funções discretas de probabilidade** : ✓ Bernoulli ✓ Binomial ✓ Poisson ✓ Uniforme Discreta ✓ Hipergeométrica	Alguns exemplos de **funções de densidade de probabilidade** : ✓ Normal ✓ Exponencial ✓ Weibull ✓ Gamma ✓ Uniforme Contínua

4 TEORIA DA AMOSTRAGEM

A teoria da amostragem é um estudo das relações que existem entre uma população e as amostras dela extraídas. Pode-se, por exemplo, avaliar grandezas desconhecidas da população (como sua média, sua variância, proporção, etc.), denominadas de **parâmetros**, através das correspondentes grandezas amostrais, denominadas de **estatísticas amostrais**.

O princípio básico desta teoria é obter o máximo de precisão na avaliação das quantidades de interesse com o mínimo tamanho de amostra. Nem sempre é possível ponderar estas duas questões de forma a obter amostras representativas. Sendo assim, diferentes métodos de seleção de amostras foram desenvolvidos para situações específicas. Alguns métodos estão abaixo descritos.

4.1 TIPOS DE AMOSTRAGEM

4.1.1 AMOSTRAGEM PROBABILÍSTICA

A amostragem será probabilística se todos os elementos da população tiverem probabilidade conhecida, e diferente de zero, de pertencer à amostra. Caso contrário, a amostragem será não probabilística.

1. Amostragem Aleatória Simples: todos os elementos tem igual probabilidade de pertencer a amostra.(Ex: números aleatórios, sorteio).

2. Amostragem Aleatória Sistemática: quando os elementos se apresentam ordenados e a retirada dos elementos da amostra é feita periodicamente (Ex: linha de produção).

3. Amostragem Aleatória Estratificada: a população se divide em subpopulações ou estratos, e a variável de interesse possui comportamento homogêneo dentro de cada estrato. Esta amostragem consiste em especificar quantos elementos serão retirados de cada estrato para constituir a amostra.

4. Amostragem Aleatória Agregada: a população é subdividida em pequenos grupos, chamados de conglomerados ou agregados, sorteia-se um número suficiente de agregados, cujos elementos constituirão a amostra (Ex: quarteirões, turmas).

4.1.2 AMOSTRAGEM NÃO-PROBABILÍSTICA

Usada quando for impossível se obter amostras probabilísticas, como seria o desejável (Ex: retirar 100 parafusos de uma caixa que contém 10.000).Assim a seleção dos elementos da população para compor a amostra depende ao menos em parte do julgamento do pesquisador. Outro tipo de amostragem não-probabilística é a amostragem por conveniência, trata-se da seleção da amostra da população mais acessíveis ao pesquisador.
A figura abaixo mostra a classificação de diferentes tipos de amostragem, o tipo de amostragem abordado nesta apostila será somente a amostragem aleatória (AAS).

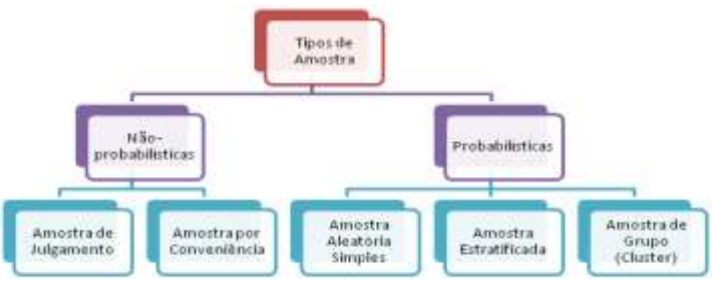


FIG. 30: Os diferentes tipos de amostragem.

4.2 TEOREMA CENTRAL DO LIMITE

Seja X_1, X_2, ..., X_n v.a. **I**ndependentes **I**denticamente **D**istribuídas (i.i.d.); com a mesma μ e σ^2 e seja $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ a soma de v.a. i.i.d., então pode-se provar que:

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} Z_n \sim \text{N}(0,1)$$

Mas $E(S_n) = E(X_1+X_2+...+X_n) = \mu_1+\mu_2+...+\mu_n = n\mu$ e

$V(S_n) = \sigma_1^2+\sigma_2^2+...+\sigma_n^2 = n\sigma^2$

Então:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} Z_n \sim \text{N}(0,1)$$

Uma dedução feita através do Teorema Central do Limite é que uma **distribuição amostral de médias tende uma distribuição normal quando n é suficientemente grande** ($n \geq 30$).

$$\frac{\sum \bar{X}_n - E(\sum \bar{X}_n)}{\sqrt{V(\bar{X}_n)}} \sim \frac{\bar{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim \underset{n\to\infty}{\rightarrow} Z_n \sim \text{N}(0,1)$$

Pode-se perceber portanto, que **independente da forma da distribuição da população,** a medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição amostral de $\bar{X}$ se aproxima cada vez mais de uma distribuição normal e no limite (quando $n \rightarrow \infty$) é uma distribuição $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Esse resultado é conhecido **com Teorema Central do Limite - TCL** (muitas vezes também chamado de Teorema do Limite Central), e é fundamental para a teoria da Inferência Estatística.

4.3 DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL

4.3.1 DISTRIBUIÇÃO AMOSTRAL DE MÉDIAS

Vimos anteriormente utilizando o TCL que uma distribuição de médias é aproximadamente Normal padronizada.

Admita-se <u>todas as amostras possíveis de tamanho **n** retiradas de uma população de tamanho **N**</u>, então poderemos determinar a média e a variância.

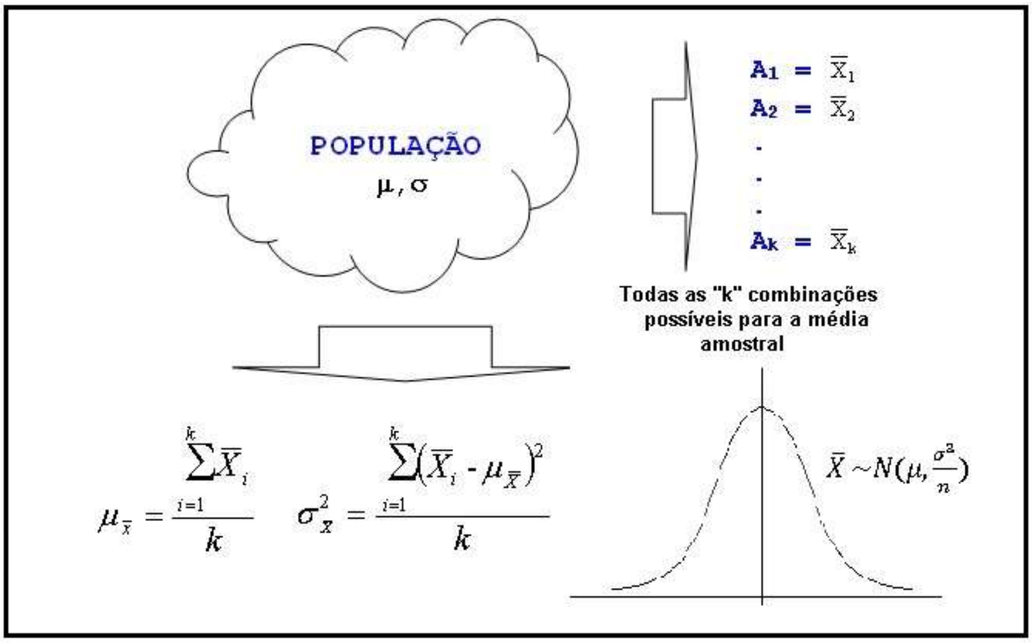


FIG. 31: Distribuição amostral de médias

Assim, de acordo com a figura acima, para uma dada amostra:

$$\mu_{\bar{X}} = E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n}(\mu + \mu + ... + \mu) = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

Amostragem	Média	Desvio Padrão
Com Reposição (pop. Infinita)	$\mu_{\bar{X}} = \mu$	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Sem Reposição (pop. Finita)	$\mu_{\bar{X}} = \mu$	$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Obs.:

1. Para grandes valores de n (n ≥ 30), a distribuição amostral das médias é aproximadamente Normal com média $\mu_{\bar{X}}$ e Variância $\sigma^2_{\bar{X}}$, independentemente da população (desde que o tamanho da população seja, no mínimo, o dobro do tamanho da amostra).
2. No caso da população ser normalmente distribuída, a distribuição amostral das médias também será, mesmo para valores pequenos de **n**.
3. A variável reduzida ou padronizada **Z** para a distribuição amostral de médias será:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}}$$

4.3.2 DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS DAS DIFERENÇAS E SOMAS:

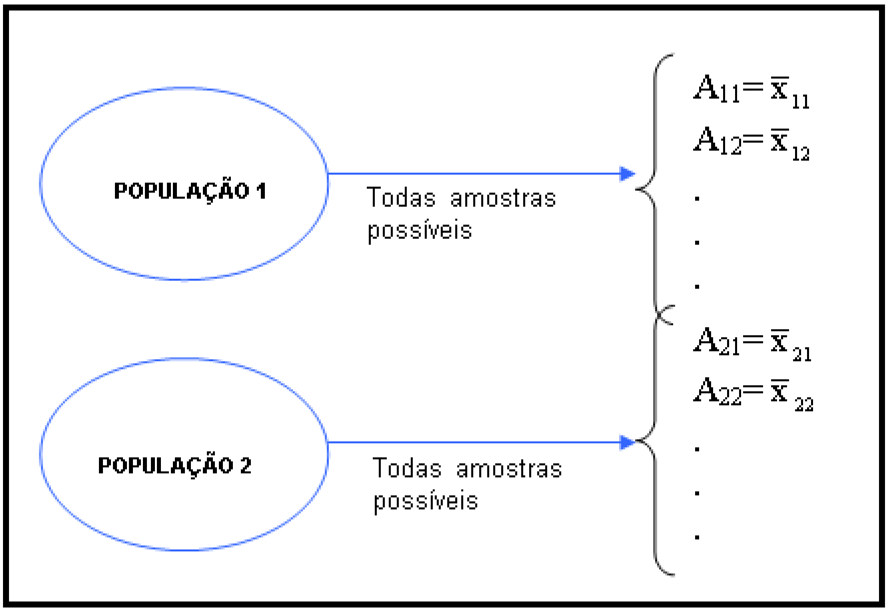


FIG. 32: Distribuição amostral de somas/subtrações

A Distribuição Amostral de Diferenças de Médias é obtida através das diferenças entre $(\bar{X}_{11} - \bar{X}_{21})$,$(\bar{X}_{12} - \bar{X}_{22})$, etc.

Analogamente, para a Distribuição. Amostral de Somas de Médias e para Distribuição Amostrais de Diferenças ou Somas de Proporções, ou qualquer outra estatística.

$$\mu_{\bar{X} \pm \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} \pm \mu_{\bar{X}_2}$$

$$\sigma^2_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \sigma^2_{\bar{X}_1} + \sigma^2_{\bar{X}_2}$$ desde que sejam independentes

Amostragem	Média	Desvio Padrão
Com Reposição (pop. Infinita)	$\mu_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} \pm \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 \pm \mu_2$	$\sigma_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
Sem Reposição (pop. Finita)	$\mu_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \mu_{\bar{X}_1} \pm \mu_{\bar{X}_2} = \mu_1 \pm \mu_2$	$\sigma_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(\frac{N_1 - n_1}{N_1 - 1}\right) + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\left(\frac{N_2 - n_2}{N_2 - 1}\right)}$

A variável reduzida Z é dada por:

$$Z = \frac{\left(\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2\right) - \mu_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2}}{\sigma_{\bar{X}_1 \pm \bar{X}_2}}$$

4.3.3 DISTRIBUIÇÕES AMOSTRAIS DE PROPORÇÕES:

Seja ***p*** a probabilidade de sucesso de um evento e ***q*** o insucesso. Consideremos todas as amostras possíveis de tamanho ***n***, obtidas com e sem reposição, e para cada um vamos calcular a proporção ***p*** de sucessos. Obtemos assim a Distribuição Amostral de Proporções com os parâmetros: μ_P e σ_P.

Amostragem	Média	Desvio Padrão
Com Reposição (pop. Infinita)	$\mu_P = p$	$\sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}}$
Sem Reposição (pop. Finita)	$\mu_P = p$	$\sigma_P = \sqrt{\frac{pq}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

Obs.:

1. Para grandes valores de ***n*** a distribuição é aproximadamente normal.
2. A população é binomial.
3. A variável padronizada ***Z*** será:

$$Z = \frac{p - \mu_P}{\sigma_P}$$

Exemplo 1 (demonstração prática do TCL para média amostral):

Numa urna, há cinco tiras de papel, numeradas 1,3,5,5,7. Uma tira é sorteada e recolocada na urna; então uma segunda tira é sorteada. Sejam X_1 e X_2 as variáveis aleatória que representam o primeiro e segundo número sorteados, e X a variável aleatória que representa o elemento do espaço amostral S={1,3,5,5,7}.

a) Descreva a distribuição de X, ou seja a probabilidade de escolher uma das tiras da urna :

x	*1*	*3*	*5*	*7*
P(x)	1/5	1/5	2/5	1/5

Calcule os parâmetros da média μ e a variância σ^2da população:

Lembre-se que :

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i)$ e

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, P(X = x_i) - \left(E(X)\right)^2$$

$E(X)$	4,2
$V(X)$	4,16

b) Calcule a distribuição conjunta do par X_1, X_2 :

X_1				
1	3	5	7	TOTAL

X_2	1	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
	3	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
	5	2/25	2/25	4/25	2/25	2/5
	7	1/25	1/25	2/25	1/25	1/5
TOTAL		1/5	1/5	2/5	1/5	1

c) Os evento X_1 e X_2 pode ser tratado como uma amostragem **aleatória simples com reposição**, onde o tamanho da amostra é *n*=2. Este tipo de amostragem, onde há reposição do elemento da população, garante a **independência** entre as variáveis aleatórias X_1 e X_2, o que permite um tratamento teórico mais simples para a inferência estatística. Calcule agora a distribuição de probabilidade para a seguinte variável aleatória:

$$\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2)}{2}$$

Por exemplo, obteremos uma média igual a 3 quando acontecer o seguinte evento A={ (1,5),(3,3),(5,1)}. Utilize as probabilidades calculadas no item b) para achar P(A) temos então:

$$\text{P}(\bar{X} = 3) = \text{P(A)} = \text{P(1,5)} + \text{P (3,3)} + \text{P (5,1)}$$

A v.a. $\bar{X}$ é uma estatística utilizada como estimador pontual para o parâmetro da média μ da população, uma vez que o estimador da média é dado por $\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$

Descreva a distribuição da v. a. $\bar{X}$

$\bar{x}$	1	2	3	4	5	6	7	TOTAL
P($\bar{X} = \bar{x}$)	1/25	2/25	5/25	6/25	6/25	4/25	1/25	1

Agora calcule a esperança e a variância de $\bar{X}$.

$E(\bar{X})$	4,2
$V(\bar{X})$	2,08

Compare com os valores encontrados no item a) para os parâmetro de média e variância da população. O que podemos verificar ?

O que você pode dizer sobre a média das médias amostrais e a média populacional. E a variância das médias amostrais em relação a variância da população ?

Resposta: A média das médias amostrais coincide com a média da população e a variância é igual variância da população dividida por *n*=2.

Se mudássemos o experimento para ao invés de sortearmos 3 tiras (*n=3*), e a nossa nova v.a. e a nossa variável aleatória fosse :

$$\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2 + X_3)}{3}$$

O que pode ser dito agora a respeito de $E(\bar{X})$ e $V(\bar{X})$?

Perceba que a medida que aumentamos o valor de *n*, o histograma se aproxima de uma distribuição normal, pois para amostras aleatórias simples ($X_1 .... X_n$) de uma população com média μ e variância σ^2 finita, a distribuição normal da média $\bar{X}$ aproxima-se, para *n* grande (*n≥=30)*, de uma distribuição normal, com média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

O diagrama na Figura abaixo 33 abaixo apresenta os resultados de um experimento no qual foi utilizado um computador para gerar aleatoriamente 2000 observações de duas distribuições bem diferentes (1ª linha).

Gerou-se então uma amostra aleatória de tamanho 2 de cada distribuição e calculamos a sua média, este procedimento foi repetido 1999 vezes e a 2ª linha mostra os histogramas das médias resultantes das amostras de tamanho dois. Repetiu-se para média amostrais onde as amostras são de tamanhos 5 (3ª linha) e 10 (4ª linha).

Note, da mesma forma que o experimento anterior, que a medida que o tamanho da amostra aumenta, a distribuição da média amostral tende a uma distribuição normal de média μ e variância $\frac{\sigma^2}{n}$.

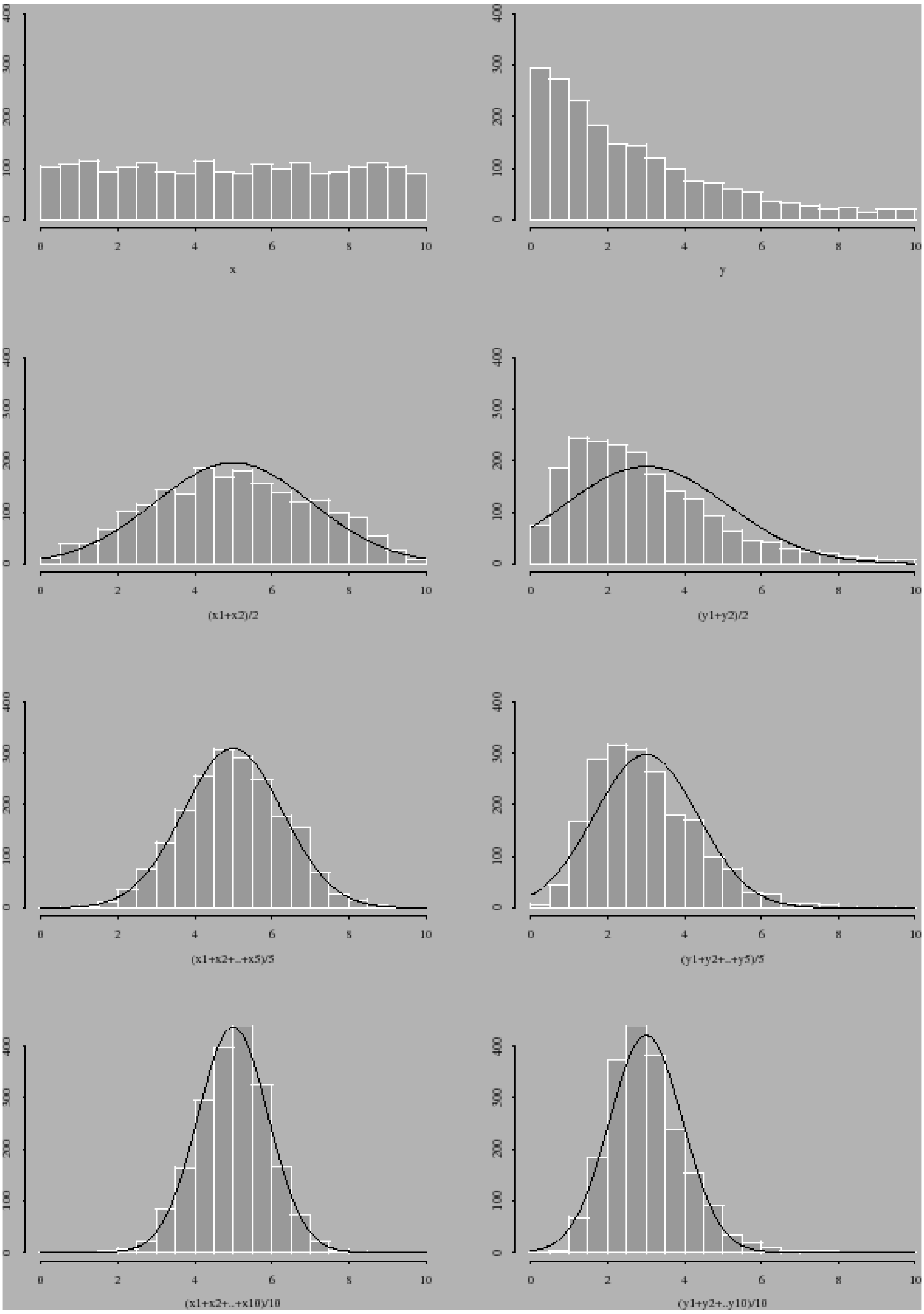


FIG. 33: Distribuição amostral de duas populações com diferentes distribuições

5 ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

5.1 INTRODUÇÃO

Seja X1, X2, ..., X_n uma amostra aleatória com função (densidade) de probabilidade conhecida, seja ainda θ um vetor dos parâmetros desta variável aleatória. Assim θ = {θ1, θ2, ..., θk} os k parâmetros que chamamos de espaço de parâmetros denotado por Θ.

Então o objetivo da inferência estatística é encontrar **funções** das observações X1, X2, ..., X_n para usar como estimador de θj onde j=1,2,...,k.

ESTIMADOR: é uma **estatística** (função conhecida de v.a. observáveis que também é um v.a.) cujos valores são usados para estimar alguma função do parâmetro θ.
Ex: para estimar μ (média populacional) o estimador mais adequado é $\bar{X}$ (média aritmética da amostra).

ESTIMATIVA: é o valor numérico obtido para o estimador numa certa amostra.

Existem dois tipos de estimadores:

ESTIMADOR PONTUAL: a estimativa é representado por um único valor, os melhores estimadores para a média μ e o desvio padrão σ são $\bar{X}$ e s respectivamente.

ESTIMADOR POR INTERVALO: a estimativa é representada por um intervalo.

5.2 PROPRIEDADE DOS ESTIMADORES

VÍCIO:

Um estimador é não viciado se sua esperança é igual ao parâmetro ou seja $E(\widehat{\theta}) = \theta$. **A média amostral é um estimador não viciado da média populacional**. Por outro lado, um estimador viciado, em média, tende a subestimar ou sobrestimar o parâmetro. As vezes, pode ser interessante usar estimadores viciados, com vícios que tendem a desaparecer quando o tamanho da amostra aumenta.

EFICIÊNCIA:

Uma segunda propriedade interessante para um estimador é ter um erro padrão pequeno*, comparado a outros estimadores. Um estimador com essa propriedade é dito ser eficiente.

* **Erro padrão** é o desvio padrão da média amostral → $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

É desejável que o estimador seja não viciado e eficiente. O estimador da média amostral e da proporção amostral são estimadores não viciados para μ e *p* respectivamente, pode-se demostrar que também são estimadores eficientes. Por outro lado

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

é um estimador **viciado** de σ^2 e

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

é um estimador **não viciado**.

Uma boa didática de se visualizar as propriedades dos estimadores e pela analogia com o jogo de dardos. Na Figura 34 abaixo estão esquematizados o desempenho de 4 jogadores, cada um com 8 dardos. Os dardos são as amostras e os jogadores representam 4 tipos de estimadores.

O jogador da Figura 34.a representa um bom estimador, pois os dardos estão em torno do alvo (não viciado) e bem concentrados (eficiente). Nas Figuras 34.b a 34.d os jogadores não tem um desempenho tão bom.

Na Figura 34.b está representado o estimador mais eficiente, comparando com os outros estimadores, mas tem vícios, apesar de os dardos aparecem concentrados em uma pequena região, estão distantes do centro do alvo.

Já o estimador caracterizado na Figura 34.c não tem vícios porém, não é eficiente, pois os dardos, apesar de ao redor do centro do alvo, se apresentam de forma dispersa. O jogador da Figura 34.1d representa o pior dos 4 estimadores: é viciado e não pode ser considerado eficiente.

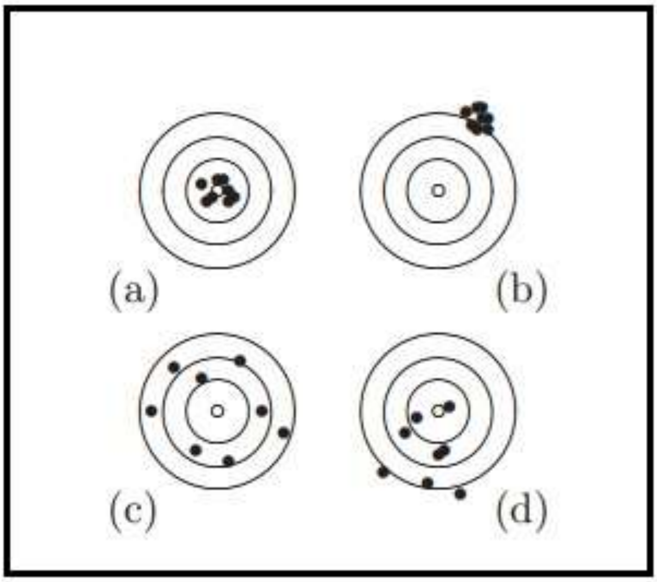


FIG. 34: Vício e eficiência de um estimador

5.3 ESTIMAÇÃO POR INTERVALO (INTERVALO DE CONFIANÇA – IC)

Um intervalo de confiança (IC) é um intervalo estimado de um parâmetro de interesse de uma população. Em vez de estimar o parâmetro por um único valor, **é dado um intervalo de estimativas prováveis**.

O quanto estas estimativas são prováveis será determinado pelo **coeficiente ou nível de confiança** (1-α), para $\alpha \in$ (0, 1). Note que os estimadores também são variáveis aleatórias, e a probabilidade de que a estimativa pontual venha a coincidir com o valor verdadeiro do parâmetro é praticamente nula.

Portanto o intervalo de confiança incorpora à estimativa pontual do parâmetro informações a respeito de sua variabilidade, de modo que este intervalo contenha o verdadeiro parâmetro populacional com um determinado grau de confiança. Os IC são obtidos a partir da distribuição amostral do estimador.

5.3.1 INTERVALO DE CONFIANÇA PARA MÉDIA POPULACIONAL

1. Quando n ≥ 30 ou σ for conhecido:

$$P\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Quando n < 30, σ desconhecido e população normalmente distribuída:

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1,\alpha/2}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

A distribuição t de Student compensa o fato de como não conhecermos a variância σ da população e o tamanho da amostra não é suficiente para aplicar o TCL. O uso da distribuição t resulta intervalos de confiança maiores do que aqueles onde a variância é conhecida, ou o tamanho da amostra é suficientemente grande para aplicarmos o TCL.

Dessa forma compensamos o aumento da incerteza que o uso do estimador do desvio padrão s introduz no calculo do intervalo de confiança.

Pode-se ver pela figura abaixo que a distribuição t de Student tem um formato semelhante à curva normal, entretanto sua cauda é mais grossa. A medida que o tamanho da amostra aumenta, o formato da curva t-Student tende à curva normal.

Existem várias curvas t Student, que são função do **grau de liberdade (n-1)** e seus valores são dados em tabela**.**

O grau de liberdade de uma estimativa é o número de elementos independentes de informação no qual a estimativa é baseada.

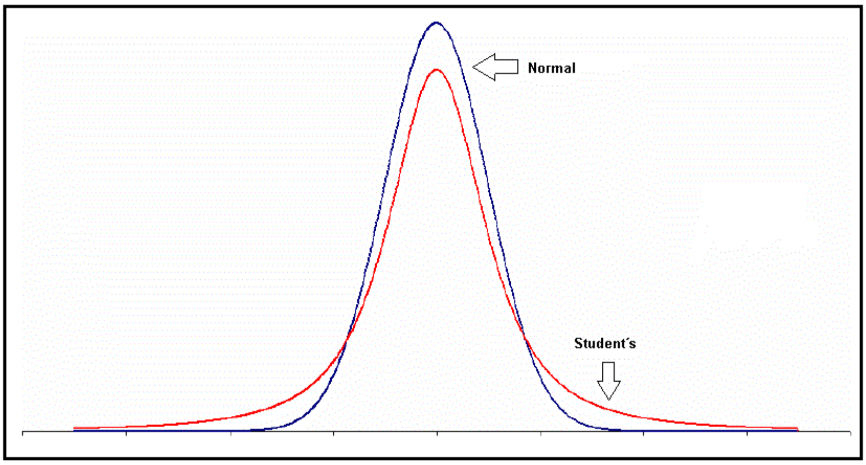


FIG. 35: Comparativo curva normal e a curva t de Student

INTERPRETAÇÃO DO INTERVALO DE CONFIANÇA:

"*Se obtivermos várias amostras de mesmo tamanho, e para cada uma delas, calculamos os correspondentes intervalos de confiança com grau de confiança (1-α), esperamos que a proporção de intervalos que contenham o valor de μ seja igual a (1-α).*"

Onde:

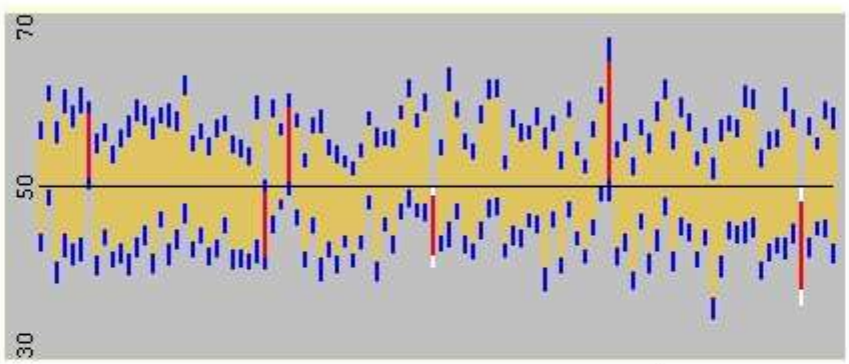
(1-α) → é o *nível ou grau de confiança* e fornece a probabilidade de conter o verdadeiro parâmetro.

α → é o *nível de significância*, representa o erro que se está cometendo ao afirmar que a probabilidade do intervalo $[\bar{x}_i - \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_i + \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}]$ conter o verdadeiro valor do parâmetro populacional μ é (1-α).

A figura 36 abaixo é o resultado de experimento computacional que simula uma população com o parâmetro $\mu = 50$ e $\sigma = 10$. Tomou-se 100 amostras de tamanho *n=15* e calculou-se o intervalo de confiança com um grau de confiança de 95% e 99% para cada uma das 100 amostras.

As linhas laranja e azuis representam os intervalos de confiança no qual o valor da média real da população se encontra dentro do intervalo para um grau de confiança de 95% e 99% respectivamente. As linhas vermelhas e branca são os intervalos de confiança cuja média real não se encontra dentro do intervalo para um grau de confiança de 95% e 99% respectivamente.

Veja que os valores encontrados na simulação são próximos aos valores esperados ao se calcular os intervalos de confiança para os níveis de 95% e 99%.



	Nível de Confiança	
	99%	95%
Contém a média = 50	98	94
Não contém a média = 50	2	6
Proporção dos que contém	0,980	0,940

FIG. 36: Simulação intervalos de confiança

Existem diversas maneiras de se calcular o intervalo de confiança (IC) para as médias, entretanto existem algumas regras que devem ser observadas:

Usa-se a distribuição Z:

a. Se a distribuição é normal E temos a variância da população σ^2 conhecida. Nesse caso o tamanho da amostra pode ser menor que 30 pois a variância da população é conhecida.

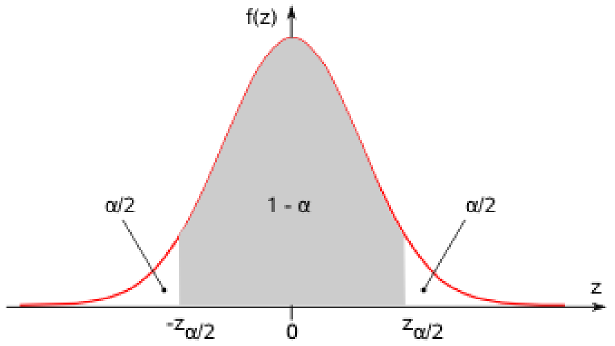
b. Se o número de amostras é maior ou igual a 30, calcula-se a estimativa da variância da através da estatística $(1/(n-1))\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ e assume-se com boa aproximação que este é o valor da variância da população. **Neste caso não é necessário que a distribuição original seja normal**, pois tem-se um número suficiente de amostras para aplicar-se o teorema central do limite (TCL).

Usa-se a distribuição t de Student:

a. Se a distribuição é normal E têm-se a variância desconhecida E um número de amostras insuficientes para usarmos a estatística Z (n<30). Assim calcula-se a estimativa da variância através da estatística $(1/(n-1))\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ e usa-se o valor dado pela distribuição t de Student dado o grau de liberdade *n-1* e nível de confiança 1-α.

Quando temos uma distribuição com assimetria (não normal portanto) e o número de amostras é pequeno (<30) não é possível estimar um intervalo de confiança para μ e é necessário o uso de métodos não paramétricos para sua estimação.

A figura 37 abaixo apresenta os valores de $Z_{\alpha/2}$ para diferentes valores de níveis de confiança.



Nível de confiança (1-α)*100%	Nível de Significância (α)	$\alpha/2$	valor $Z_{\alpha/2}$	e (Erro)
99%	0,01	0,005	2,58	$\pm\frac{2{,}58\sigma}{\sqrt{n}}$
98%	0,02	0,01	2,32	$\pm\frac{2{,}32\sigma}{\sqrt{n}}$
97%	0,03	0,015	2,17	$\pm\frac{2{,}17\sigma}{\sqrt{n}}$
96%	0,04	0,02	2,05	$\pm\frac{2{,}05\sigma}{\sqrt{n}}$
95%	0,05	0,025	1,96	$\pm\frac{1{,}96\sigma}{\sqrt{n}}$
90%	0,10	0,05	1,64	$\pm\frac{1{,}64\sigma}{\sqrt{n}}$

FIG. 37: Níveis de confiança e valores correspondentes para $Z_{\alpha/2}$

A tabela a seguir na próxima página apresenta as equações do intervalo de confiança para uma amostra, para duas amostras, proporção e para variâncias conhecidas ou desconhecidas.

QUANDO	**FÓRMULA IC para um grau de confiança 100(1-α)%**
Quer-se estimar o IC da média μ de uma população com distribuição normal e desvio padrão σ conhecido com *n* amostras.	$\bar{x} - \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{\sqrt{n}}$
Quer-se estimar o IC da média μ de uma população com distribuição desconhecida e desvio padrão σ desconhecido com $n \geq 30$ amostras (Teorema Central do Limite – TCL → a média amostral tende a uma N($\mu, \frac{S^2}{n}$). Usa-se o desvio padrão s calculado a partir da amostra.	$\bar{x} - \frac{Z_{\alpha/2}S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{Z_{\alpha/2}S}{\sqrt{n}}$
Quer-se estimar o IC da média μ de uma população com distribuição normal e desvio padrão σ desconhecido com $n < 30$ amostras. Usa-se o desvio padrão S calculado a partir da amostra.	$\bar{x} - \frac{t_{\alpha/2,n-1}S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{t_{\alpha/2,n-1}S}{\sqrt{n}}$
Quer-se estimar o IC da proporção p de uma população com distribuição binomial desde que $n \geq 30$. Abordagem conservativa: considera-se *p*=0,5 (pior caso)	$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
Quer-se estimar o IC da diferença das média $\mu_1 - \mu_2$ de uma população com distribuições normais e desvios padrões conhecidos σ_1 e σ_2 com n_1 e n_2 amostras.	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
Quer-se estimar o IC da diferença das média $\mu_1 - \mu_2$ de 2 populações com distribuições desconhecidas e desvios padrões desconhecidos σ_1 e σ_2 com n_1 e $n_2 \geq 30$ amostras (TCL).	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}$
Quer-se estimar o IC da diferença das média $\mu_1 - \mu_2$ de 2 populações com distribuições normais e desvios padrões desconhecidos $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ com n_1 e $n_2 < 30$.	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)S_p^2} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,n_1+n_2-2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)S_p^2}$ $S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$

Quer-se estimar o IC da diferença das média $\mu_1 - \mu_2$ de 2 populações com distribuições normais e desvios padrões desconhecidos $\sigma_1 \neq \sigma_2$ e com n_1 e n_2 < 30.	$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,\upsilon} \sqrt{\left(\frac{S_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{S_2^2}{\mathrm{n}_2}\right)} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,\upsilon} \sqrt{\left(\frac{S_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{S_2^2}{\mathrm{n}_2}\right)}$ $\upsilon = \frac{\left(\frac{S_1^2}{\mathrm{n}_1} + \frac{S_2^2}{\mathrm{n}_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{\mathrm{n}_1}\right)^2}{\mathrm{n}_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{\mathrm{n}_2}\right)^2}{\mathrm{n}_2 - 1}}$, *arredonde para o inteiro* $> \upsilon$ *mais proximo*

5.3.2 INTERVALO DE CONFIANÇA PARA PROPORÇÕES

Como se observou na tabela acima, para calcular os intervalos de confiança de proporções, também utiliza-se a estatística Z. O parâmetro p é o parâmetro associado a distribuições binomiais.

Para melhor entendimento, suponha que retiramos uma amostra de tamanho *n* de uma população de tamanho suficientemente grande para admitirmos que é infinita. A definição de proporção é uma fração de indivíduos com determinada característica ou atributo de uma população, assim para uma amostra, a estimativa de proporção seria :

$$\hat{p} = \frac{Nr. de\ indivíduos\ da\ amostra\ com\ determinada\ caracterínstica}{Tamanho\ da\ amostra\ (n)}$$

Se associarmos para cada indivíduo da amostra uma v.a. Y tal que :

$$Y_i \begin{cases} 1, se\ o\ indivíduo\ apresenta\ a\ característica\ de\ interesse \\ 0, se\ o\ indivíduo\ não\ apresenta\ a\ caraterística\ de\ interesse \end{cases}$$

A proporção amostral pode ser calculada como :

$$\hat{p} = \frac{(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \bar{Y}$$

Logo pode-se definir a proporção como a média de variáveis aleatórias com distribuição de Bernoulli. Lembre-se que para uma distribuição de Bernoulli $E(Y_i) = p$ e $Var(Y_i) = p(1-p)$.

Assim, a esperança da proporção de uma amostra pode ser dado como :

$$\begin{aligned} E(\hat{p}) &= E((Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)/n) \\ &= [E(Y_1) + E(Y_2) + \cdots + E(Y_n)]/n) \\ &= \frac{p + p + \cdots + p}{n} \\ &= \frac{np}{n} \\ &= p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\hat{p}) &= Var((Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n)/n) \\ &= Var(Y_1/n) + Var(Y_2/n) + \cdots + Var(Y_n/n) \\ &= p(1-p)/n^2 + p(1-p)/n^2 + \ldots + p(1-p)/n^2 \\ &= n\left[\frac{p(1-p)}{n^2}\right] = \frac{p(1-p)}{n} \end{aligned}$$

O estimador $\hat{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ apresenta a esperança igual ao parâmetro p da população, logo trata-se de um estimador não tendencioso.

Do teorema central do limite temos que a medida que *n* tende ao infinito a distribuição da média amostral tende a ser uma Normal com $E(\bar{Y})$ e $Var(\bar{Y})$

$\bar{Y} \sim N(E(\bar{Y}), Var(\bar{Y}))$, transformando para Z temos :

$$Z = \frac{\bar{Y} - E(\bar{Y})}{\sqrt{Var(\bar{Y})}} = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$$

Finalmente, o IC para proporção é :

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{p}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{p}}$$

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

5.3.3 TAMANHO MÍNIMO DE UMA AMOSTRA

Pode-se determinar o tamanho de amostra isolando o valor de n na precisão da estimativa (semi-amplitude) que no caso da média populacional é dada por:

$e_0 = z_{\alpha/2}\sigma_{\bar{x}}$ dessa forma temos para:

a. Tamanho da amostra, com erro especificado para a média, e variância <u>conhecida</u> (população normal):

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}\sigma}{e}\right)^2$$

onde *e* é o erro máximo especificado (metade do comprimento do intervalo de confiança).

b. Tamanho da amostra, com erro especificado para *p* em uma distribuição binomial :

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$$

onde *e* é o erro máximo especificado (metade do comprimento do intervalo de confiança).
Para o pior caso (maior tamanho mínimo da amostra) é quando *p*=0,5 assim :

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 0{,}25$$

c. Tamanho da amostra, com erro especificado para a média, e variância <u>desconhecida</u>:

Para n $\geq$ 30, temos que pelo TCL a distribuição tende a uma normal, logo :

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}S}{e}\right)^2$$

Onde *e* é o erro máximo especificado (metade do comprimento do intervalo de confiança) e S é o desvio padrão calculado a partir da amostra.

A figura 38 abaixo apresenta um fluxograma prático para a avaliação de médias populacionais:

FIG. 38: Fluxograma para o cálculo de IC para médias populacionais

5.3.4 EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Exercício 1) Suponha que X represente a duração da vida de uma peça de um equipamento. Admita-se que 100 peças sejam ensaiadas, fornecendo uma duração de vida média de $\bar{X} = 501{,}2$ horas. Suponha-se que σ seja conhecido e igual a 4 horas, e que se deseje obter um intervalo de confianças de 95% para a média.

SOLUÇÃO:

Nesse caso, encontra-se o seguinte intervalo de confiança para o parâmetro $\mu = E(X)$

$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \alpha = 0{,}05$

$Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}025} = 1{,}96$ (veja Fig. 37), logo

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$501{,}2 - 1{,}96 * \frac{4}{\sqrt{100}} \leq \mu \leq 501{,}2 + 1{,}96 * \frac{4}{\sqrt{100}}$$

$$501{,}2 - 0{,}784 \leq \mu \leq 501{,}2 + 0784$$

$500{,}41 \leq \mu \leq 501{,}98$ ou $IC(\mu, 95\%) = [500{,}41; 501{,}98\,]$

Logo pode-se afirmar com nível de confiança de 95% que o tempo médio de duração da peça está no intervalo entre $500{,}41$ e $501{,}98$ horas.

OBSERVAÇÃO: Vale a pena relembrar, ao se afirmar que $[0{,}240\ ;\ 0{,}674]$ constitui um intervalo de confiança de 95% para o parâmetro μ, não estamos dizendo que 95 % das vezes o valor de $\bar{X}$ cairá neste intervalo. A próxima vez que tirarmos uma amostra aleatória, presumivelmente será diferente e, por isso, os extremos do intervalo de confiança serão diferentes (veja exemplo da Fig. 36). Estamos afirmando que 95% das vezes, o valor do parâmetro μ estará contido no intervalo. O mesmo raciocínio vale para a proporção amostral $\hat{p}$ retirada a partir da amostra em relação ao parâmetro p.

Exercício 2) Um supervisor de produção deseja conhecer a estimativa do tempo médio que um membro da equipe gasta para executar determinada tarefa. Suponha que uma amostra de 38 execuções revelou que a média foi de 45 minutos com um desvio-padrão de 6 minutos. Determine um intervalo de 99% de confiança para o parâmetro.

SOLUÇÃO:

Como n≥30, mesmo com desvio padrão σ desconhecido (só temos a estimativa *S* da amostra) podemos usar a distribuição Z, logo

Para um nível de confiança de 99%, o valor de $Z_{\alpha/2}$ é 2,58 (veja Fig. 37), logo:

$$\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 45 - 2{,}58 * \frac{6}{\sqrt{38}} \le \mu \le 45 + 2{,}58 * \frac{6}{\sqrt{38}}$$

$$42{,}49 \le \mu \le 47{,}51 \text{ ou } IC(\mu, 99\%) = [42{,}49; 47{,}51\ ]$$

Logo pode-se afirmar com nível de confiança de 99% que o tempo médio de execução do membro da equipe está no intervalo entre 42,49 e 47,51 minutos.

Exercício 3) Um economista deseja estimar a renda média para o primeiro ano de trabalho de um bacharel em direito. Quantos valores de renda devem ser tomados, se o economista deseja ter 95% de confiança em que a média amostral esteja a menos de R$ 500,00 da verdadeira média populacional? Suponha que saibamos, por um estudo prévio, que para tais rendas s = R$ 6250,00.

SOLUÇÃO:

Queremos determinar o tamanho n da amostra, dado que α = 0,05 (95% de confiança), logo $Z_{\alpha/2}$=1,96 (veja Fig. 37). Desejamos que a média amostral seja a menos de R$ 500 da média populacional, de forma que e = 500. Supondo s = 6250, então:

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}S}{e}\right)^2 = \left(\frac{1{,}96*6250}{500}\right)^2 = 600{,}25 \sim 601 \text{ valores}$$

Devemos, portanto, obter uma amostra de ao menos 601 rendas de primeiro ano, selecionadas aleatoriamente, de bacharéis de faculdades que tenham feito um curso de direito. Com tal amostra teremos 95% de confiança em que a média amostral $\overline{\mathrm{X}}$ difira em menos de R$ 500,00 da verdadeira média populacional.

Exercício 4) Deseja saber o tamanho da amostra (n) necessário para determinar a proporção da população que utiliza determinado produto no município de Curitiba. Não foi feito um levantamento prévio da proporção amostral e, portanto, seu valor é desconhecido.

Deseja-se obter-se 90% de confiança que o erro máximo de estimativa (e) seja de ±5% (ou 0,05). Quantas pessoas necessitam ser entrevistadas?

SOLUÇÃO:
Considerando que o valor da proporção amostral de pessoas que utilizam o determinado produto não é conhecida. Utilizamos uma estimativa conservadora (pior caso) supondo p=0,5, logo:

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 0{,}25$$

Sabemos que, para 90% de confiança teremos o valor crítico $Z_{\alpha/2}$= 1,64 (veja Fig. 37), assim:

$$n = \left(\frac{1{,}64}{0{,}05}\right)^2 0{,}25 \ = 270{,}6 \sim 271$$

Devemos, portanto, obter uma amostra de 271 pessoas para determinar a proporção da pessoas que utilizam o produto em questão na cidade de Curitiba.

Exercício 5) Uma amostra de 35 compras a varejo mostrou que 16 foram pagas em dinheiro. Construa um intervalo de confiança para a proporção de compras em dinheiro realizadas no varejo com nível de confiança de 99%.

SOLUÇÃO:

$$\hat{p} = \frac{16}{35} = 0{,}457$$
$$1 - \alpha = 0{,}99 \ \rightarrow \alpha = 0{,}01$$

$Z_{\alpha/2} = Z_{0{,}005} = 2{,}58$ (veja Fig. 37), logo

Como n ≥ 30, podemos utilizar a distribuição Z, o valor de Z para um nível de significância $\alpha/2$= 0,005 é de 2,58. Assim, aplicando a fórmula do intervalo de confiança para a proporção temos:

$$\hat{p} - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$0{,}457 - 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}457(1-0457)}{35}} \leq p \leq 0{,}457 + 2{,}58\sqrt{\frac{0{,}457(1-0457)}{35}}$$

Assim, o intervalo de confiança para a proporção será:

$0{,}240 \leq p \leq 0{,}674$ ou IC[p;99%]=[$0{,}240; 0{,}674$]

Pode-se afirmar com 99% de grau de confiança que a proporção verdadeira da população de clientes que compram no varejo e pagam em dinheiro se encontra entre 24,0% e 67,4%.

Exercício 6) Calcule o tamanho mínimo da amostra do exercício anterior para que a semi-amplitude (erro) do intervalo de confiança não seja maior que 5% ?

SOLUÇÃO:

Percebe-se que no exercício anterior o IC de confiança é muito grande, com um erro de IC/2 = 21,7%. Para diminuir o IC deveremos aumentar o tamanho da amostra.

O calculo do tamanho da amostra é dado por:

$$e = Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \text{ então } n = \left(\frac{Z_{\alpha/2}}{e}\right)^2 \hat{p}(1-\hat{p})$$

Assim, se quisermos diminuir o erro de cerca de 22% para 5% por exemplo, e mantivermos o mesmo grau de confiança, o tamanho da amostra será:

$$n = \left(\frac{2{,}58}{0{,}05}\right)^2 0{,}457(1-0{,}457) = 661$$

Logo o tamanho da amostra deverá ser de no mínimo de 661 clientes para um nível de confiança de 99%. Um tamanho de amostra quase 20x maior que a amostra original.

Não é necessário conhecermos a proporção para calcularmos o tamanho da amostra. O produto $\hat{p}(1-\hat{p})$ sempre terá seu **maior valor** para *p=0,5.* Assim, caso não conhecêssemos a proporção da população de clientes que pagam em dinheiro, calcularíamos para uma proporção estimada de 50%. Assim :

$$n = \left(\frac{2{,}58}{0{,}05}\right)^2 0{,}5^2 = 666$$

O que resultaria uma amostra de 666 clientes (o pior caso de tamanho de amostra com grau de confiança de 1%, que nos garante um erro de 0,05 com proporção desconhecida).

Perceba que a medida que queremos um erro menor (um intervalo de confiança menor), devemos aumentar o tamanho da amostra.

Exercício 7) Em uma fábrica, colhida uma amostra aleatória de certa peça, foram obtidas as seguintes medidas, em cm, para os diâmetros:

14	14	14	15	15	15	16	16	16

Sabendo que a amostra foi extraída de uma população com distribuição normal, construa um intervalo de confiança para o diâmetro médio ao nível de 95 %.

SOLUÇÃO:

Como n<30 e o desvio padrão σ é desconhecido, calculamos a partir da amostra, então temos:

$\bar{X} = 15$ cm

$S = 0{,}866$ cm

Utiliza-se neste caso a distribuição t, logo o grau de liberdade da distribuição t é n-1=9-1=8. E da tabela verifica-se que $t_{0,025;8}$ tem-se o valor de 2, 306. Assim:

	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	9%	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	0.5%	0.25%	0.1%
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	3.104	3.320	3.578	3.896	4.303	4.849	5.643	6.965	9.925	14.089	19.962	31.599
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	2.471	2.605	2.763	2.951	3.182	3.482	3.896	4.541	5.841	7.453	9.465	12.924
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.226	2.333	2.456	2.601	2.776	2.999	3.298	3.747	4.604	5.598	6.758	8.610
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.098	2.191	2.297	2.422	2.571	2.757	3.003	3.365	4.032	4.773	5.604	6.869
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.019	2.104	2.201	2.313	2.447	2.612	2.829	3.143	3.707	4.317	4.981	5.959
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	1.966	2.046	2.136	2.241	2.365	2.517	2.715	2.998	3.499	4.029	4.595	5.408
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	1.928	2.004	2.090	2.189	2.306	2.449	2.634	2.896	3.355	3.833	4.334	5.041
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	1.899	1.973	2.055	2.150	[illegible]	2.398	2.574	2.821	3.250	3.690	4.146	4.781
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	1.877	1.948	2.028	2.120	[illegible]	2.359	2.527	2.764	3.169	3.581	4.005	4.587
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	1.859	1.928	2.007	2.096	2.201	2.328	2.491	2.718	3.106	3.497	3.895	4.437
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	1.844	1.912	1.989	2.076	2.179	2.303	2.461	2.681	3.055	3.428	3.807	4.318
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	1.832	1.899	1.974	2.060	2.160	2.282	2.436	2.650	3.012	3.372	3.735	4.221
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	1.821	1.887	1.962	2.046	2.145	2.264	2.415	2.624	2.977	3.326	3.675	4.140
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	1.812	1.878	1.951	2.034	2.131	2.249	2.397	2.602	2.947	3.286	3.624	4.073

$$\bar{x} - t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2;n-1}\frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$15 - 2,306 * \frac{0,866}{\sqrt{9}} \le \mu \le 15 + 2,306 * \frac{0,866}{\sqrt{9}}$$

$$15\ -\ 0.667\ \le \mu \le 15 +\ 0.667$$

$$14,334 \le \mu \le 15,667$$

ou $\quad IC(\mu, 95\%) = [14,334; 15,667]$

O intervalo de 14,334 cm a 15,667 cm contém o diâmetro médio da peça, com 95% de confiança.

Exercício 8) Suponha que p = 30% dos estudantes de uma escola sejam mulheres. Colhemos uma amostra aleatória simples de n = 50 estudantes e calculamos $\hat{p}$ = proporção de mulheres na amostra. Qual a probabilidade de que $\hat{p}$ difira de p em menos de 0,01?

SOLUÇÃO:

Temos que a probabilidade que desejamos encontrar é dada por

$$P\ (|\hat{p}\ -\ p|\ <\ 0.01)\ =\ P\ (-0.01\ <\ \hat{p}\ -\ p\ <\ 0.01)$$

Onde p é o valor verdadeiro da proporção de mulheres, e $\hat{p}$ a proporção observada na amostra. Sabemos que se n é grande, $\hat{p} -$ p pode ser aproximada por uma normal $N\ (0, \frac{p(1-p)}{n})$.
Como p = 0,3, temos que

$$Var\ (\hat{p} -\ p) = \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\ \ \frac{0,3 * 0,7}{50} = 0,0042$$

Assim,

$$P\left(-\frac{0,01}{\sqrt{0,0042}} \le Z \frac{0,01}{\sqrt{0,0042}}\right) = P(-0,154 \le Z \le 0,154) = 0,12239$$

Exercício 9) Com o objetivo de comparar duas marcas de pneus A e B, foram criados dois grupos, A e B, cada um com 30 carros usando as marcas de pneu A e B respectivamente que apresentam as mesmas condições de uso. Antes e depois de um período de 60 dias de utilização dos automóveis foi anotado o desgaste em mm, obtendo-se $\overline{X_A}$ = 21, 3 mm S_A = 2, 6 mm e $\overline{X_B}$ = 13, 4 mm S_B = 1, 8 mm. Pede-se um IC de 95% de confiança para a diferença de médias.

SOLUÇÃO:

O tamanho da amostra para o grupo A e para o grupo B é n≥30, logo usamos a distribuição Z. A diferença observada é $\overline{X_A}$-$\overline{X_B}$ = 7,9 mm e o intervalo de confiança é dado por :

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{\mathrm{n}_1}+\frac{S_2^2}{\mathrm{n}_2}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{S_1^2}{\mathrm{n}_1}+\frac{S_2^2}{\mathrm{n}_2}}$$

$$7{,}9 - 1{,}96\sqrt{\frac{2{,}6^2}{30}+\frac{1{,}8^2}{30}} \le \mu_A - \mu_B \le 7{,}9 + 1{,}96\sqrt{\frac{2{,}6^2}{30}+\frac{1{,}8^2}{30}}$$

$$6,768 \le \mu_1 - \mu_2 \le 9,032 \text{ ou } IC(\mu_A - \mu_B, 95\%) = [6,768; 9,032\,]$$

IMPORTANTE: Quando o zero pertence ao intervalo de confiança, há forte evidência de que não há diferença entre as duas médias populacionais. No Exemplo acima com base no intervalo de confiança de 95%, podemos concluir que há diferença significativa entre os desgastes médios dos pneus para as marcas A e B, pois o valor zero não pertence ao intervalo de confiança.

Exercício 10) O tempo para realizar uma tarefa, em segundos, foi anotado para 10 homens e 11 mulheres, igualmente treinados. As médias e variâncias obtidas foram:

HOMEM	MULHER
n_1 = 10	n_2 = 11
X_1=45,33	X_2=43,54
S=1,54	S=2,96

Determine um intervalo de confiança de 99% para a diferença entre os tempos médios de homens e mulheres. Assuma que as variâncias populacionais são iguais. Pode-se afirmar que as médias são iguais para este nível de confiança ?

SOLUÇÃO:

O tamanho da amostra para as amostras é n<30, logo usamos a distribuição t de Student. Na tabela da distribuição t de Student com n_1+n_2 – 2= 21-2=19 g.l. encontramos que t = 2, 86, para $(1-\alpha) * 100\% =$ 99% de confiança. Calculando Sp (variâncias iguais) temos:

	90%	80%	70%	60%	50%	40%	30%	20%	10%	9%
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	3.104
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	2.471
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.226
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.098
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.019
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	1.966
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	1.928
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	1.899
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	1.877
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	1.859
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	1.844
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	1.832
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	1.821
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	1.812
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	1.805
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	1.798
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	1.792
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	1.786
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	1.782
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	1.777

	8%	7%	6%	5%	4%	3%	2%	1%	0.5%	0.25%	0.1%
2	3.320	3.578	3.896	4.303	4.849	5.643	6.965	9.925	14.089	19.962	31.599
3	2.605	2.763	2.951	3.182	3.482	3.896	4.541	5.841	7.453	9.465	12.924
4	2.333	2.456	2.601	2.776	2.999	3.298	3.747	4.604	5.598	6.758	8.610
5	2.191	2.297	2.422	2.571	2.757	3.003	3.365	4.032	4.773	5.604	6.869
6	2.104	2.201	2.313	2.447	2.612	2.829	3.143	3.707	4.317	4.981	5.959
7	2.046	2.136	2.241	2.365	2.517	2.715	2.998	3.499	4.029	4.595	5.408
8	2.004	2.090	2.189	2.306	2.449	2.634	2.896	3.355	3.833	4.334	5.041
9	1.973	2.055	2.150	2.262	2.398	2.574	2.821	3.250	3.690	4.146	4.781
10	1.948	2.028	2.120	2.228	2.359	2.527	2.764	3.169	3.581	4.005	4.587
11	1.928	2.007	2.096	2.201	2.328	2.491	2.718	3.106	3.497	3.895	4.437
12	1.912	1.989	2.076	2.179	2.303	2.461	2.681	3.055	3.428	3.807	4.318
13	1.899	1.974	2.060	2.160	2.282	2.436	2.650	3.012	3.372	3.735	4.221
14	1.887	1.962	2.046	2.145	2.264	2.415	2.624	2.977	3.326	3.675	4.140
15	1.878	1.951	2.034	2.131	2.249	2.397	2.602	2.947	3.286	3.624	4.073
16	1.869	1.942	2.024	2.120	2.235	2.382	2.583	2.921	3.252	3.581	4.015
17	1.862	1.934	2.015	2.110	2.224	2.368	2.567	2.898	3.222	3.543	3.965
18	1.855	1.926	2.007	2.101	2.214	2.356	2.552	2.878	3.197	3.510	3.922
19	1.850	1.920	2.000	2.093	2.205	2.346	2.539	2.861	3.174	3.481	3.883
20	1.844	1.914	1.994	2.086	2.197	2.336	2.528	[illegible]	3.153	3.455	3.850
21	1.840	1.909	1.988	2.080	2.189	2.328	2.518	[illegible]	3.135	3.432	3.819

$$S_p^2 = \frac{(\mathrm{n}_1 - 1)s_1^2 + (\mathrm{n}_2 - 1)s_2^2}{\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2} = \frac{9 * 1{,}54^2 + 10 * 2{,}96^2}{10 + 11 - 2} = 2{,}29$$

Como $X_1 - X_2 = 1,79$, temos então:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{\alpha/2,\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2-2}\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}\right)S_p^2} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{\alpha/2,\mathrm{n}_1+\mathrm{n}_2-2}\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{n}_1} + \frac{1}{\mathrm{n}_2}\right)S_p^2}$$

$$1,79 - 2,861\sqrt{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right)2{,}29^2} \le \mu_1 - \mu_2 \le 1,79 + 2,861\sqrt{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right)2{,}29^2}$$

$$-0,10 \le \mu_1 - \mu_2 \le 3,68 \text{ ou } IC(\mu_1 - \mu_2, 99\%) = [-0,10; 3,68]$$

Quando o zero pertence ao intervalo de confiança, há forte evidência de que não há diferença entre as duas médias populacionais. Com base neste intervalo com 99% confiança, podemos dizer que não existe diferença entre os tempos médios de homens e mulheres.

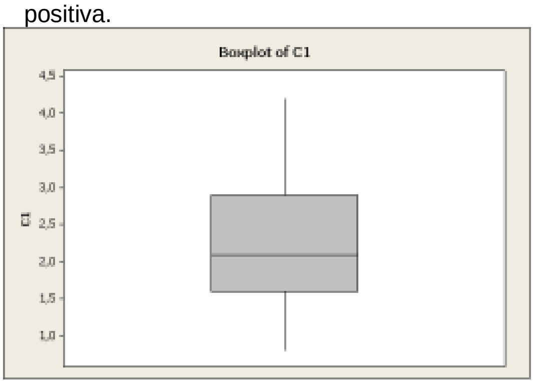
SOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

CAP.1

1. a) 700 b) 959 c) 100 d) 76 e) 15,5% f) 65,5% g) 194 h) 138 i) 29,5% j)83,5%

2. b) Q1=1,421; Q2=1,400 ; Q3=1,792

3. a) AT=3,4 k=6 amplitude da classe=0,567
c) Q1=1,600; Q2=2,100; Q3=2,900 A distribuição tem uma assimetria positiva.

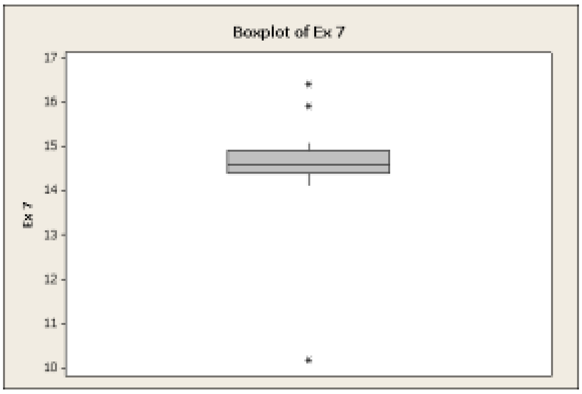


4. a) $\bar{x} = 2{,}295$ b) s=0,840 c) $\tilde{x} = Q2 = 2{,}100$ d) polimodal e) 36,60%

5. rede A : Q1=14,25 Q2=15,50 Q3=18,75
rede B : Q1=10,00 Q2=12,00 Q3=17,00
b) Com 25% a rede A é mais barata
c) Com 75% a rede A é mais cara

6. O menor coeficiente de variação é do peso com CV=0,12

7. A amostra possui 3 *outliers* (10,2; 15,9; 16,4) e distribuição simétrica negativa



8. Ambas distribuições apresentam assimetria. Apesar do gráfico à esquerda apresentar um valor médio de produtividade menor e uma maior variabilidade que o gráfico da direita, este porém apresenta valores atípicos. Valores atípicos podem fazer parte do conjunto de dados, uma vez que distribuições assimétricas ou distribuições com caudas longas tem tendência maior de apresentar *outliers* em seus box-plots. Tais valores, entretanto igualmente podem ser oriundos de erros na aferição ou no registro dos dados.

CAP.2

Exercício 1

a) {4}
b) {0,1,2,3,4,5}
c) {0, 5}
d) {1,2,3,4}
e) {1,2}
f) {1,2,3,4}
g) {0,4,5}
h) {4}

Exercício 2

a) P(V)= 7/22
b) $P(B^C)$= 16/22
c) P(BUAz) = 11/22
d) $P[(VUB)^C]$ = 1-P(VUB)= 9/22
e) P(VUAzUAm)= 1-P(B)= 16/22

Exercício 3

a) $P(V_1 \cap V_2)= P(V_1)*P(V_2|V_1)$ = (7/22)*(6/21);
b) $P(B_1 \cap V_2)= P(B_1)*P(V_2|B_1)$ = (6/22)*(7/21);
c) $P(V_1 \cup V_2)=1 - P[(V_1^C \cap V_2^C)] = 1 - P(V_1^C).P(V_2^C|V_1^C$ = 1 – (15/22)*(14/21)
d) $P[(Az_1^C \cap Az_2^C)]= P(Az_1^C).P(Az_2^C|Az_1^C$ = (17/22)*(16/21)
e) $P[(Az_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap Az_2)]= P(Az_1).P(B_2|Az_1)+P(B_1).P(Az_2|B_1)$ =2*(5*6)/(22*21)

Exercício 4.

a) $P(V_1 \cap V_2)= P(V_1)*P(V_2|V_1)$ = (7/22)*(7/22);
b) $P(B_1 \cap V_2)= P(B_1)*P(V_2|B_1)$ = (6/22)*(7/22);
c) $P(V_1 \cup V_2)=1 - P[(V_1^C \cap V_2^C)] = 1 - P(V_1^C).P(V_2^C|V_1^C$ = 1 – (15/22)*(15/22)
d) $P[(Az_1^C \cap Az_2^C)]= P(Az_1^C).P(Az_2^C|V_1^C$ = (17/22)*(17/22)
e) $P[(Az_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap Az_2)]= P(Az_1).P(B_2|Az_1)+P(B_1).P(Az_2|B_1)$ =2*(5*6)/(22*22)

Exercício 5.

a) $P(D_1 \cap D_2 \cap D_3) = (0{,}2)^3$
b) $P(D_1^C \cap D_2^C \cap D_3^C) = [1 - P(D)]^3 = [1 - 02]^3$
c) 1- $P(D_1^C \cap D_2^C \cap D_3^C) = 1 - [1 - 02]^3$

Exercício 6.

R:P(Nenhum vivo)=(1-0,35)*(1-0,55)*(1-0,9).Eventos independentes.

Exercício 7.

a) P(MSev ∩ FSev**)=** $(0{,}35) * (0{,}2)$
b) $P(MSev^C \cap FSev^C = (1 - 0{,}35) * (1 - 0{,}2)$
c) 1- P(MSev ∩ FSev)= $1 - [(0{,}35) * (0{,}2)]$
d) P(MSev ∪ FSev)= P(MSev) + P(FSev)- P(MSev ∩ FSev)= 0,35+0,20-0,35*0,20= 0,48

Exercício 8.

P(A)= 2*P(B)
P(B)= 4*(PC) → P(A)= 8*P(C)
P(A)+P(B)+P(C)= 1 → 8*P(C)+ 4*P(C)+ P(C) = 1 → P(C)= 1/13
P(B) = 4/13
P(A) = 8/13

Exercício 9.

a) P(B)=0,3
b) P(B)=0,6

Exercício 10

R:
a)
$P(D) = P[(D \cap Fa)\ U\ (D \cap Fb)\ U\ (D \cap Fc]) = 0{,}40 * 0{,}01 + 0{,}30 * 0{,}04 + 0{,}30 * 0{,}03 = 0{,}025$
b)

$$P(FabA|D) = \frac{P(FabA \cap D)}{P(D)} = \frac{P(FabA).P(D|FabA)}{P(D)} = \frac{0{,}40 * 0{,}01}{0{,}025} = 0{,}16$$

Exercício 11.

R:

$Ganhou \quad = (Chuva \cap Ganhou)\ U\ (Sol \cap Ganhou)$

$P(Ganhou\ ) \quad = P(Chuva) * (Ganhou|Chuva) + P(Sol) * (Ganhou|Sol)$

$P(Ganhou\ ) \quad = 0{,}3 * 0{,}7 + 0{,}7 * 0{,}8 = \ 0{,}77$

$$P(Chuva|Ganhou) = \frac{P(Chuva \cap Ganhou)}{P(Ganhou)} = \frac{P(Chuva) * (Ganhou|Chuva)}{P(Ganhou)} = \frac{0{,}3 * {,}07}{0{,}77}$$

Exercício 12

a)

P(S|A)=P(S∩A)/P(A) = P(S) → Condição eventos independentes

0,43/0,50 = 0,86 ≠ 0,71 → Logo não são eventos independentes

b)

P(S|A)=P(S∩A)/P(A) = 0,43/0,50 = 0,86

c)

P(S ∪ A) = P(S)+P(A)- P(S ∩ A) = 0,71 + 0,5 – 0,43 =0,78

Exercício 13

R:0,07450

Exercício 14

a) R:0,48

b) R:0,68

c) R:0,52

d) R:0,32

e) R:080

f) R:0,40

g) R:0,41176

h) R:0,23077

Exercício 15

a) P(A) R: 1/13, P(V) R: ½ e P(E) R: ¼ .

b) P(A ∩ V) R: 1/26, P(A ∩ E) R: 1/52 e P(V ∩ E) R: 0.

c) P(A ∪ V) R: 7/13, P(A ∪ E) R: 4/13 e P(V ∪ E) R: 3/4.

d) P(A|V)? Sim, pois P(A|V)=P(V|A)=P(A).P(V)=1/13

e) Não, pois P(E|V)=0 ≠ P(E).P(V)=1/8

f.1) Sim são independentes pois o resultado de A1 não influencia a probabilidade de A2. P(A2|A1)=P(A1)=1/13

f.2) P(A2∩A1)=P(A1).P(A2|A1)=P(A1).P(A2)=(1/13)^2 = 1/169

Exercício 16

a) R: 0,0742

b) R: 0,285

c) R: 0,8035

d) R: 0,521

Exercício 17

a) R:0,34

b) R:0,18

Exercício 18

a) R: 2p(1-p)

b) R: 3p2 (1-p)

c) R: 2/3

Exercício 19

a)R: FALSO, pois nada se falou que sobre E e G serem independentes, logo não podemos afirmar que P[(E∩G)=P(E).P(G). Adicionalmente também não podemos afirmar que P[(E∩F) ∩ (E∩ G)]=P(E∩F).P(E∩G).
P[E ∩(F∪G)]=P(E∩F)+ P(E∩G)-P[(E∩F)∩(E∩G)]

b)R: VERDADEIRO, pois o resultado não está condicionado a nenhuma probabilidade dependente, e sim a uma soma de produtos de probabilidades independentes.
P[E ∩(F∪G)]=P(E∩F) + P(E∩G)-P[E∩(F∩G)∩E] , mas (F∩G) = vazio, logo:
P[E ∩(F∪G)]=P(E∩F) + P(E∩G)
P[E ∩(F∪G)]=P(E).P(F)+ P(E).P(G)=P(E).[P(F)+P(G)]

c) R: VERDADEIRO
P[G∩(E∩F)]= P[E∩(F∩G)], como E e F∩G são independentes:
P[G∩(E∩F)]= P(E)*P[F∩G] , F e G são independentes, logo:
P[G∩(E∩F)]= P(E)*P(F)*P(G)

CAP.3

Exercício 1

a) Ω = { MMMM, MMMF, MMFM, MMFF, MFMM, MFMF, MFFM, MFFF,FMMM, FMMF, FMFM, FMFF, FFMM, FFMF, FFFM, FFFF }
b) X pode assumir os valores 0,1,2,3 ou 4

x	P(X=xi)
0	0,0625
1	0,25
2	0,375
3	0,25
4	0,0625

c) E(x)=n.p = 4.1/2 = 2

d) DP(X)= $\sigma = n.p.q\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$

Exercício 2

a) E(X)= 20800 reais; V(X)= 59360000 reais^{2}; DP(X)= 7704,54 reais
b) Y=1,3X – 2000 → E(Y) = 1,3E(X) – 2000 = 25040 reais

Exercício 3

a) E(X) = 12,75 reais
b) O gasto com 10.000 bilhetes será 10.000*E(X)=R$ 127.500,00, para ter um lucro de R$ 20.000 o banqueiro deverá vender os bilhetes a pelo menos R$ 14,75 cada um.

Exercício 4

a) É binomial, p é constante, variáveis são independentes, sequencia de eventos de Bernoulli
b) Não é binomial, p não é constante
c) É binomial se a probabilidade de obter bolas brancas nas 5 urnas seja a mesma
d) É binomial se a probabilidade do habitante ser contra o projeto seja a mesma em cada uma das 10 cidades
e) É binomial se a probabilidade da peça ser defeituosa seja a mesma para cada máquina

Exercício 5

$P(X = xi) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{6-x}$
p(X) = 1 – P(X=0)-P(X=1)-P(X=2) = 0,16946

Exercício 6
a) Distribuição de probabilidade binomial X ~b(4,0,60)

$$P(X = xi) = \binom{4}{x}(0,6)^x(0,4)^{4-x}$$

A probabilidade de receber P(X=0) (0 reais) é de 0,0256, P(X=1) (50 reais) é de 0,1536, P(X=2) (100 reais) é de 0,3456; P(X=3) (150 reais) é de 0,3456 e P(X=4) (200 reais) é de 0,1296
b)P(X≥ 2)=1- P(X=0) – P(X=1) = 1 - 0,0256 - 0,1536=0,8208
c)E(X)= 0,0256*0 + 50*0,1536 + 100*0,3456 + 150*0,3456 + 200*0,1296 = 120 reais

Exercício 7
$P(X = xi) = \frac{e^{-5}5^x}{x!}$
a) $P(X = 5) = 0,1755$
b) $P(X = xi) = \frac{e^{-3,5}2,5^x}{x!}$
$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,713$

Exercício 8
$P(X = xi) = \frac{e^{-8}8^x}{x!}$
a) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,996985$
b) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,013745$
c) $P(7 \leq X < 9) = P(X = 7) + P(X = 8) = 0,27918$
$P(X = xi) = \frac{e^{-4}4^x}{x!}$
d) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0,762$

Exercício 9
$P(X = xi) = \binom{10}{x}(0,2)^x(0,8)^{10-x}$
a) $P(X = 0) = 0,1074$
b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,6242$
c) $P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0,6778$
d) $E(X) = 2$ clientes
e) $DP(X) = 1,265$ clientes

Exercício 10
$P(X = xi) = \binom{5}{x}(0,1)^x(0,9)^{5-x}$
a) $P(X = 3) = 0,0081$
b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 0,0815$
c) A probabilidade de não haver nenhuma peça defeituosa em uma caixa é P(X=0)=0,59049, logo a probabilidade de haver pelo menos uma peça defeituosa é de 0,40951. De 1000 portanto cerca de 410 caixas conterão ao menos uma peça defeituosa, e portanto a multa ser paga é de 4100,00 reais.

Exercício 11
$P(X = xi) = \binom{30}{x}(0,0015)^x(0,9985)^{30-x}$
A inspeção total só vai acontecer se ao menos 1 smartphone com defeito for encontrado. Logo:

$$P(Inspeção\ Total) = 1 - P(X = 0) = 0,044$$

Exercício 12
$P(X = xi) = \frac{e^{-1}1^x}{x!}$

a) $P(X \geq 4) = 1 - P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}01899$
b) Como as ocorrências seguem uma distribuição de Poisson, ocorrências em uma semana são independentes da outra semana qualquer, pode-se afirma que o número de semanas em um ano que ocorrem mais de 3 ocorrências é de 0,987 semanas ou aproximadamente 1 semana.

Exercício 13

$P(X = xi) = \frac{e^{-5}5^x}{x!}$

a) $P(X > 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 0{,}87536$
b) Sim pois há uma chance de quase 90% de haver mais de dois pedidos em determinada hora
c)$P(X = xi) = \frac{e^{-40}40^x}{x!}$
$P(X = 50) = 0{,}0177$ Não, pois a probabilidade de ocorrer 50 pedidos em oito horas é de apenas 1,77%

Histórico de Revisões		
Versão	Revisão	Data
1.00	Versão Inicial	11/08/14
1.01	Texto ex. 2 melhorado *(pg. 18)* Índice do item Box-Plot corrigido (*pg.16)* Incluído comentário sobre *outliers (pg.17)* Incluído exercício 7,8 (*pg.19,20*) Corrigido índice do 3º quartil *(pg. 12)* Alterado último parágrafo item Coef. Variação *(pg. 14)* Alterações menores na formatação	14/08/14
1.02	Corrigida fórmula ponto de corte inferior de Q3 - 1,5Q para Q1 - 1,5Q (pg. 16) Índice figura pg. 17 corrigido. Novo capítulo adicionado.	18/08/14
1.03	Exercícios Cap. 2 Recomendações de exercícios final Cap. 1	19/08/14
1.04	Gabarito Lista Exercícios Cap. 1	21/08/14
1.05	Cap. 3 inserido Gab. Lista exercícios Cap. 2	29/08/14
1.06	Incorporado lista de exercícios Cap. 2 feita em classe aos exercícios do Cap. 2. Itens 3.1,3.2,3.3 melhorado o texto págs. 39,40,41 Exemplo 2. item 3.4 (pág. 44) corrigido o valor da prob. do prejuízo (0,23 e não 0,10)), pois a soma de todas as probabilidades deve ser 1..Exemplo 1. item 3.5 (pág.45) adicionado o cálculo do valor do desvio padrão. .Equação da variância distr. discreta uniforme (pág. 45) corrigida (divide por 12 e não por 1). Exemplo 1 (dist. Bernoulli) pág. 47, valores de probabilidade corrigidos.	03/09/14
1.07	Corrigido gabarito Ex. 9 Cap. 2 Corrigido gabarito Ex. 1.c Cap. 3 Corrigido texto e resultados do Exemplo 1 Distr. Binomial (pág. 48/49- planos de saúde) Corrigido resultado exemplo 1 Dist. Poisson pág. 50 Item b) Exemplo Distr. Binomial é P>=1 e não P>=0 (pág. 48) Incluído distribuições discretas Geométricas e Hipergeométricas Introduzido texto dist. continua uniforme e normal	17/10/14
1.08	Adicionado exemplos para calcular probabilidade usando a distribuição normal padrão	05/01/15