UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

1ª LISTA DE EXERCICIOS CE087 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES B

Prof. Benito Olivares Aguilera 2º Sem./2019

1. A função $F(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x-y}, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0; \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$

pode ser uma função de distribuição conjunta? Explique.

2. A função de distribuição conjunta de (X,Y) é dada por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y \\ \dfrac{2x^2y^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < y, 0 \leq y < 2 \\ \dfrac{8x^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < 2, y \geq 2 \\ 1, & x \geq 2, y \geq 2, x < y. \end{cases}$$

a) Obtenha as funções de distribuição marginais de X e Y.
b) Calcule a densidade conjunta entre X e Y.
c) Calcule as densidades marginais de X e Y de duas maneiras diferentes.

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias relacionadas pela função:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(2x+\frac{y}{2})}, & x \geq 0, \ y \geq 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

a) É $f(x,y)$ uma densidade conjunta?
b) X e Y são independentes?
c) Encontre as densidades marginais de X e Y.
d) Quanto vale P(X ≤ 1, Y≤ 2)?

4. A densidade conjunta de X e Y é dada por
$f(x,y) = 1/2, \ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$.

a) Calcule as distribuições marginais.
b) X e Y são independentes?
c) Determine a função de distribuição conjunta de X e Y.

5. Considere a função $f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{k}$, definida sobre o conjunto $A = \{(x,y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Encontre o valor da constante k para $f(\mathrm{x},\mathrm{y})$ ser densidade conjunta de X e Y.

b) Calcule as distribuições marginais.

c) X e Y são independentes?

6. Seja $(X,Y) \sim NB(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, \rho)$. Calcule as distribuições marginais.

7. Seleciona-se, ao acaso, um ponto do círculo unitário. Sejam X e Y as coordenadas do ponto selecionado.

a) Qual a distribuição do vetor (X,Y)?

b) Determine $P(X < Y), P(X > Y)$ e $P(X = Y)$.

8. Um ponto (X,Y) é selecionado ao acaso do quadrado com vértices $(-1,0)$, $(0,-1)$, $(0,1)$ e $(1,1)$.

a) Encontre a densidade conjunta de X e Y.

b) Encontre as densidades marginais de X e Y.

c) X e Y são independentes?

9. Um ponto (X,Y,Z) é escolhido aleatoriamente dentro de uma esfera de raio 1.

a) Encontre a densidade conjunta de X, Y e Z.

b) Encontre a densidade conjunta de X e Y.

c) Encontre uma expressão, na forma de integral, para a densidade marginal de X.

10. A densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 1/4, -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1 \\ 1/4, 0 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 0 \\ \quad 0, \ \ c.c \end{cases}$$

a) Calcule as distribuições marginais.

b) X e Y são independentes?

c) X e Y são identicamente distribuídas?

d) Determine a função de distribuição conjunta de X e Y.

11. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, 0 \leq x \leq y \\ 0, c.c. \end{cases}$$

Calcule as densidades marginais de X e Y.

12. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 \\ \quad 0, \qquad\qquad\qquad\quad \text{c. c.} \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x,y)$ é uma densidade conjunta.

b) Encontre as densidades marginais de X e Y.
c) X e Y são independentes?
d) Calcule $P(X \leq 1/2)$.
e) Quanto vale $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$?

13. A superfície de tensão X_1 e a acidez X_2 de um certo composto químico são variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(3 - x_1 - x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 2.$$

Verificar se a superfície de tensão depende da acidez.

14. Dois tetraedros (dados com quatro faces) com as faces numeradas de 1 a 4 são lançados e os números das faces voltadas para baixo são observados. Sejam X e Y as seguintes variáveis aleatórias:

X: **maior** dos números observados;
Y: **menor** dos números observados.

a) Descreva o espaço amostral Ω para esse experimento.
b) A que eventos de Ω corresponde o evento [X=4, Y=1]?
c) Encontre a distribuição conjunta de X e Y.
d) Calcule as distribuições marginais.
e) X e Y são independentes?

15. Numa certa confecção, uma máquina de costura industrial é utilizada, na parte da manhã, para costuras simples e na parte da tarde, para fazer arremates. Sejam as variáveis aleatórias

X: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da manhã.

Y: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da tarde.

A partir de longos períodos de observação, a seguinte distribuição de probabilidade conjunta de X e Y foi determinada

X \ **Y**	**0**	**1**	**2**
0	0.1	0.2	0.2
1	0.04	0.08	0.08
2	0.06	0.12	0.12

a) Encontre a Função Distribuição (Acumulada) Conjunta de X e Y
b) Encontre as distribuições marginais