UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

1ª LISTA DE EXERCICIOS CE308 – TEORIA DA PROBABILIDADE 2

Prof. Benito Olivares Aguilera — 2° Sem./2024

1. Considere a função de distribuição conjunta

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y; \\ \dfrac{2x^2y^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < y, 0 \leq y < 2; \\ \dfrac{8x^2 - x^4}{16}, & 0 \leq x < 2, y \geq 2; \\ 1, & x \geq 2, y \geq 2, x < y. \end{cases}$$

a) Desenhe a região de definição R.
b) Obtenha as funções de distribuição marginais de X e Y.
c) Calcule a densidade conjunta de X e Y.
d) Calcule as densidades marginais de X e Y de duas formas diferentes.
e) São X e Y independentes?

2. Seja (X, Y, Z) um vetor aleatório com função densidade conjunta dada por:

$$f(x,y,z) = \begin{cases} kxy^2z, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Encontre o valor da constante k.
b) Encontre as distribuições marginais.
c) Calcule a probabilidade $P\big((X,Y,Z) \in C\big)$, sendo C o cubo de aresta um.

3. Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola retirada e Y o número da segunda.
a) Descreva a distribuição conjunta de X e Y.
b) Calcule $P(X < Y)$.

4. No lançamento de dois dados, seja X a variável aleatória que representa a soma das faces e seja Y o valor absoluto da diferença.
a) Apresente o espaço amostral do experimento e a função de probabilidade conjunta de X e Y.
b) São X e Y independentes?

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias relacionadas pela função:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(2x+\frac{y}{2})}, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, \qquad \text{c.}c. \end{cases}$$

a) É $f(x,y)$ uma densidade conjunta?

b) X e Y são independentes?

c) Encontre as densidades marginais de X e Y.

d) Quanto vale $P(X \leq 1, Y \leq 2)$?

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 \\ 0, \qquad \text{c. c.} \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x,y)$ é uma densidade conjunta.

b) Encontre as densidades marginais de X e Y.

c) X e Y são independentes?

d) Quanto vale $P(X \leq 1/2\,, Y \leq 1/2)$?

7. Dois tetraedros (dados com quatro faces) com as faces numeradas de 1 a 4 são lançados e os números das faces voltadas para baixo são observados. Sejam X e Y as seguintes variáveis aleatórias:

X: **maior** dos números observados;

Y: **menor** dos números observados.

a) Descreva o espaço amostral Ω para esse experimento.

b) A qué eventos de Ω corresponde o evento [X=4, Y=1]?

c) Encontre a distribuição conjunta de X e Y.

d) Calcule as distribuições marginais.

e) X e Y são independentes?

8. Seja $f(x,y) = k, \ 0 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1, \ 0 \leq x + y \leq 1.$

a) Encontre o valor da constante k para que f seja uma densidade.

b) Calcule $P(X \leq 1/2, Y \leq 1/2)$.

c) Calcule as densidades marginais.

d) X e Y são independentes?

9. Calcule as densidades marginais se X e Y têm densidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

10. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, 0 \le x \le y \\ 0, c.c. \end{cases}$$

Calcule as densidades marginais de X e Y.

11. Denote por p(x,y) a probabilidade P(X=x, Y=y). Dadas as probabilidades

p(0,10) = p(0,20) = 2/18; p(1,10) = p(1,30) = 3/18; p(1,20) = p(2,30) = 4/18.

a) Calcule a distribuição de Y dada X.
b) Calcule P(Y >10 | X =1).

12. Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Calcule as distribuições marginais de *X* e *Y*. Elas são independentes?

13. Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica definida por

$$P(X_i = n) = p(1-p)^n, n = 0,1,2 \ldots; i = 1,2.$$

Calcule $P(X_1 = X_2)$ e $P(X_1 < X_2)$.

14. Considere um círculo de raio *r* e centro na origem, e suponha que um ponto é aleatoriamente selecionado no círculo. Sejam X e Y as coordenadas do ponto escolhido.

a) Determine a função densidade conjunta;
b) Encontre as densidades marginais de *X* e de *Y*;
c) Encontre a probabilidade de que a distância da origem ao ponto selecionado não seja maior do que *a* (*a*>*0*).

15. Numa certa confecção, uma máquina de costura industrial é utilizada, na parte da manhã, para costuras simples e na parte da tarde, para fazer arremates. Sejam as variáveis aleatórias

X: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da manhã.
Y: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da tarde.
A partir de longos períodos de observação, a seguinte distribuição de probabilidade conjunta de X e Y foi determinada

X \ **Y**	**0**	**1**	**2**
0	0.1	0.2	0.2
1	0.04	0.08	0.08
2	0.06	0.12	0.12

a) Encontre a Função Distribuição (Acumulada) Conjunta de X e Y
b) Encontre as distribuições marginais
c) Encontre a distribuição condicional de X dado Y=2 e a distribuição condicional de Y dado X=0.

16. A superfície de tensão X_1 e a acidez X_2 de um certo composto químico são variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(3 - x_1 - x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 2.$$

Verificar se a superfície de tensão depende da acidez.

17. Sejam X e Y com densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}, (x,y) \in R, \text{ sendo } R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a) Calcule as marginais e verifique se X e Y são independentes.
b) Determine a densidade condicional de X dado que $Y = 1/2$.

18. Seja $(X,Y) \sim U(R)$. Diga se as variáveis são independentes quando:
a) R é o quadrado unitário.
b) R é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

19. Suponha que a densidade do vetor (X,Y) seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2 + y), 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine:
a) o valor da constante k;
b) as densidades marginais de X e Y;
c) o gráfico aproximado das marginais.
d) $P(Y < X)$;
e) $P(0 \leq X < 1/2)$.
f) A expressão geral da função distribuição.

20. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$) respectivamente. Mostre que, para $k > 0$,

$$P(X - kY > 0) = \lambda_2/(k\lambda_1 + \lambda_2).$$

21. Suponha que X e Y tenham densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1 + xy}{k}, -1 < x < 1, -1 < y < 1.$$

a) Encontre a constante k.

b) Discuta a veracidade da afirmação: "se X^2 e Y^2 são independentes, então X e Y também são independentes".

Sugestão:

i. Verifique que $P(X^2 \leq x, Y^2 \leq y) = P(X^2 \leq x)\, P(Y^2 \leq y)$

ii. Verifique se X e Y são independentes.

iii. Estabeleça sua conclusão.

22. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, assumindo os valores -1 e 1 com a mesma probabilidade. Sejam as variáveis aleatórias U e V definidas por: $U = X$ e $V = XY$.

a) Podem U e V serem independentes, dado que ambas dependem de X? Verifique.

b) Encontre a função $F_{U,V}(u, v)$.

c) Quanto vale $P(U \leq \frac{1}{2}, V > \frac{1}{2})$?