UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

1ª LISTA DE EXERCICIOS CE308 – TEORIA DA PROBABILIDADE 2

Prof. Benito Olivares Aguilera — 2° Sem./2025

CARACTERIZAÇÃO DE VETORES ALEATÓRIOS E INDEPENDÊNCIA.

1. A função $F(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x-y}, x \geq 0 \text{ e } y \geq 0; \\ 0, \text{ caso contrário,} \end{cases}$

pode ser uma função de distribuição conjunta? Explique.

2. A função de distribuição conjunta de X e Y é dada por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \text{ ou } y < 0; \\ \dfrac{x}{5}(1-e^{-y}), \ 0 \leq x < 5, \ \ y \geq 0; \\ 1-e^{-y}, \ x \geq 5, \ \ y \geq 0. \end{cases}$$

a) Verifique que $F_{X,Y}$ satisfaz as condições para uma função distribuição.
b) Identifique as distribuições (marginais) das variáveis X e Y. São independentes?

3. Considere a função de distribuição conjunta

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ \dfrac{1}{2}(x^2y + xy^2), 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1 \\ \dfrac{1}{2}(x + x^2), 0 \leq x < 1, y \geq 1 \\ \dfrac{1}{2}(y + y^2), x \geq 1, 0 \leq y < 1 \\ 1, \quad x \geq 1, y \geq 1 \end{cases}$$

Calcule a função densidade conjunta e as distribuições marginais de X e Y.

4. Considere a função de distribuição conjunta

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, \quad x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y; \\ \dfrac{2x^2y^2 - x^4}{16}, 0 \leq x < y, 0 \leq y < 2; \\ \dfrac{8x^2 - x^4}{16}, 0 \leq x < 2, y \geq 2; \\ 1, \quad x \geq 2, y \geq 2, x < y. \end{cases}$$

a) Desenhe a região de definição R.
b) Obtenha as funções de distribuição marginais de X e Y.
c) Calcule a densidade conjunta de X e Y.
d) Calcule as densidades marginais de X e Y de duas formas diferentes.
e) São X e Y independentes?

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias que assumem valores em $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. A função que relaciona probabilisticamente ambas variáveis é proporcional ao valor absoluto da soma dos seus valores.

a) Determine as distribuições marginais.
b) As variáveis X e Y são independentes?
c) Calcule $P(|X - Y| \leq 1)$.

6. A densidade conjunta de X, Y e Z é dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{16}[4(xy + xz + yz) + 4(x + y + z) + 7]; x \in [0,1], y \in [0,1], z \in [0,1].$$

a) As variáveis são independentes?
b) Calcule $P(X \leq 1/2, Y \geq 1/3)$.

7. Seja (X, Y, Z) um vetor aleatório com função densidade conjunta dada por:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} kxy^2z, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2} \\ 0, \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a) Encontre o valor da constante k.
b) Encontre as distribuições marginais.
c) Calcule a probabilidade $P\big((X, Y, Z) \in C\big)$, sendo C o cubo de aresta um.

8. Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Defina as variáveis aleatórias X: menor número entre os dois resultados;
Y: maior número entre os dois resultados.

a) Descreva a distribuição conjunta de X e Y.
b) Encontre as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

9. Suponha que uma moeda honesta é jogada três vezes. Seja X o número de caras obtidas e seja Y o número de lançamentos até aparecer a primeira cara (se isso não ocorrer, então $Y = 0$).

a) Encontre a distribuição conjunta de X e Y.
b) Calcular as distribuições marginais de X e Y.
c) Calcular $P(X \leq 2, Y = 1)$, $P(X \leq 2, Y \leq 1)$ e $P(X \leq 2 \text{ ou } Y = 1)$.

10. No lançamento de dois dados, seja X a variável aleatória que representa a soma das faces e seja Y o valor absoluto da diferença.

a) Apresente o espaço amostral do experimento e a função de probabilidade conjunta de X e Y.

b) São X e Y independentes?

11. A densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\pi}-y}, -\infty < x < +\infty, y \geq 0 \\ 0, \quad \text{c.}c. \end{cases}$$

Verifique se X e Y são independentes.

12. Sejam X e Y variáveis aleatórias relacionadas pela função:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(2x+\frac{y}{2})}, x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, \quad \text{c.}c. \end{cases}$$

a) É $f(x,y)$ uma densidade conjunta?

b) X e Y são independentes?

c) Encontre as densidades marginais de X e Y.

d) Quanto vale $P(X \leq 1, Y \leq 2)$?

13. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0,\text{c.}c. \end{cases}$$

a) Mostre que $f(x,y)$ é uma densidade conjunta.

b) Encontre as densidades marginais de X e Y.

c) X e Y são independentes?

d) Quanto vale $P(X \leq 1/2\,, Y \leq 1/2)$?

14. Dois tetraedros (dados com quatro faces) com as faces numeradas de 1 a 4 são lançados e os números das faces voltadas para baixo são observados. Sejam X e Y as seguintes variáveis aleatórias:

X: **maior** dos números observados;

Y: **menor** dos números observados.

a) Descreva o espaço amostral Ω para esse experimento.

b) A qué eventos de Ω corresponde o evento [X=4, Y=1]?

c) Encontre a distribuição conjunta de X e Y.

d) Calcule as distribuições marginais.

e) X e Y são independentes?

15. Seja $f(x,y)=k,\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1,\ 0\le x+y\le 1.$

a) Encontre o valor da constante *k* para que *f* seja uma densidade.

b) Calcule $P(X\le 1/2, Y\le 1/2).$

c) Calcule as densidades marginais.

d) X e Y são independentes?

16. Calcule as densidades marginais se X e Y têm densidade conjunta dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},\ 0\le y\le x\le 1\\ 0,\ \ c.c.\end{cases}$$

17. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y}, 0\le x\le y\\ 0, c.c.\end{cases}$$

Calcule as densidades marginais de X e Y.

18. Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta dada por

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<y<1\\ 0, & \text{c.c.}\end{cases}$$

Calcule as distribuições marginais de *X* e *Y*. Elas são independentes?

19. Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica definida por

$$P(X_i=n)=p(1-p)^n, n=0,1,2\ldots; i=1,2.$$

Calcule $P(X_1=X_2)\ e\ P(X_1<X_2)$.

20. Considere um círculo de raio *r* e centro na origem, e suponha que um ponto é aleatoriamente selecionado no círculo. Sejam X e Y as coordenadas do ponto escolhido.

a) Determine a função densidade conjunta;

b) Encontre as densidades marginais de *X* e de *Y*;

c) Encontre a probabilidade de que a distância da origem ao ponto selecionado não seja maior do que *a* (*a*>*0*).

21. Numa certa confecção, uma máquina de costura industrial é utilizada, na parte da manhã, para costuras simples e na parte da tarde, para fazer arremates. Sejam as variáveis aleatórias

X: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da manhã.
Y: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da tarde.
A partir de longos períodos de observação, a seguinte distribuição de probabilidade conjunta de X e Y foi determinada

X \ **Y**	**0**	**1**	**2**
0	0.1	0.2	0.2
1	0.04	0.08	0.08
2	0.06	0.12	0.12

a) Encontre as distribuições marginais
b) Encontre a Função Distribuição (Acumulada) Conjunta de X e Y

22. A superfície de tensão X_1 e a acidez X_2 de um certo composto químico são variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(3 - x_1 - x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 2.$$

Verificar se a superfície de tensão depende da acidez.

23. Sejam X e Y com densidade conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}, (x,y) \in R, \text{ sendo } R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Calcule as marginais e verifique se X e Y são independentes.

24. Seja $(X,Y) \sim U(R)$. Verifique se as variáveis são independentes quando:
a) R é o quadrado unitário.
b) R é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,0)$.

25. Suponha que a densidade do vetor (X,Y) seja:

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2 + y), 0 \leq y \leq 1 - x^2 \\ 0, \quad \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine:
a) o valor da constante k;
b) as densidades marginais de X e Y;
c) o gráfico aproximado das marginais.
d) $P(Y < X)$;
e) $P(0 \leq X < 1/2)$.
f) A expressão geral da função distribuição.

26. As variáveis X e Y estão relacionadas probabilisticamente pela seguinte função:

$$f(x,y) = e^{-y}(1-e^{-x})\mathbb{I}_{(0,y]}(x)\mathbb{I}_{[0,\infty)}(y) + e^{-x}(1-e^{-y})\mathbb{I}_{(0,x]}(y)\mathbb{I}_{[0,\infty)}(x),$$

onde $\mathbb{I}$ representa a função indicadora.

a) Mostre que a função dada é uma densidade conjunta.
b) Determine $P(X > 1, Y < 2)$.
c) Obtenha as distribuições marginais.
d) As variáveis são independentes?

27. Seja Y a taxa de chamadas por hora que chegam a uma central de atendimento. Seja X o número de chamadas durante um período de duas horas. Uma escolha usual para o comportamento probabilístico conjunto dessas variáveis é dada pela função:

$$f(x,y) = \frac{e^{-3y}(2y)^x}{x!}, y > 0, x = 0,1,2,\cdots$$

a) Verifique que a função $f(x,y)$ está bem definida.
b) Encontre $P(X = 0)$.

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS, INDEPENDÊNCIA E MÉTODO DO JACOBIANO.

28. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial de parâmetros λ_1 e λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$) respectivamente. Mostre que, para $k > 0$,

$$P(X - kY > 0) = \lambda_2/(k\lambda_1 + \lambda_2).$$

29. Suponha que X e Y tenham densidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \frac{1+xy}{k}, -1 < x < 1, -1 < y < 1.$$

a) Encontre a constante k.
b) Discuta a veracidade da afirmação: "se X^2 e Y^2 são independentes, então X e Y também são independentes".

<u>**Sugestão**</u>:

i. Verifique que $P(X^2 \leq x, Y^2 \leq y) = P(X^2 \leq x)\, P(Y^2 \leq y)$
ii. Verifique se X e Y são independentes.
iii. Estabeleça sua conclusão.

30. Suponha que X e Y são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, assumindo os valores -1 e 1 com a mesma probabilidade. Sejam as variáveis aleatórias U e V definidas por: $U = X$ e $V = XY$.

a) Podem U e V serem independentes, dado que ambas dependem de X? Verifique.
b) Encontre a função $F_{U,V}(u,v)$.
c) Quanto vale $P(U \leq \frac{1}{2}, V > \frac{1}{2})$?

31. Uma urna contém 1 bola vermelha e 2 brancas. Retira-se uma amostra de tamanho 3 com reposição. Seja a variável aleatória

$$X_i = \begin{cases} 1, \text{se a i} - \text{ésima bola é vermelha} \\ 0, \text{se a i} - \text{ésima bola é branca.} \end{cases}$$

a) Encontre a distribuição conjunta de (X_1, X_2, X_3).

b) Determine $P(X_1 + X_2 = X_3)$.

32. A temperatura de resfriamento de um fluido, em graus Fahrenheit (*X*), pode ser considerada como sendo uma variável aleatória $exp(2)$. Encontre a distribuição da temperatura em graus Celsius (chame-a de *Y*), sabendo que $Y = \frac{5}{9}(X - 32)$. Faça os gráficos das distribuições e encontre a probabilidade da temperatura *Y* ser menor que 20ºC.

33. Se X e Y são variáveis aleatórias contínuas, independentes e distribuídas uniformemente no intervalo (0,60), encontre $P(|X - Y| < 10)$.

34. Se $X \sim exp(1/2)$, encontre a densidade de $Y = X^{1/2}$. Tal distribuição é chamada **Weibull** de parâmetros *2* e *1/2*.

35. Seja $X \sim N(0,1)$, encontre a densidade de $Y = e^X$. Tal distribuição é chamada **Lognormal** de parâmetros *0* e *1*.

36. Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias independentes com distribuição comum *N(0,1)*. Mostre que $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ e $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$ também são independentes e *N(0,1).*

37. Suponha que *X* e *Y* sejam variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $exp(\theta)$. Prove que X+Y e X/Y são independentes.

38. Se *X* e *Y* são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas $U(0,1)$, encontre as densidades de $X + Y, X - Y$ e X/Y.

39. Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias independentes com densidades:

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, |x| < 1;$$
$$f_Y(y) = \frac{y}{\sigma^2} exp(-\frac{y^2}{2\sigma^2}), y > 0.$$

Encontre a distribuição do produto *XY*.

40. Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Provar que $Z = \frac{X}{X+Y}$ possui distribuição *U*[0,1].