UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

2ª LISTA DE EXERCICIOS CE308 – TEORIA DA PROBABILIDADE 2

Prof. Benito Olivares Aguilera 2° Sem./2025

DISTRIBUIÇÃO DAS ESTATÍSTICAS DE ORDEM.

1. Sejam $X_1, X_2, \dots, X_n$ variáveis aleatórias iid $Pareto\ (1, c)$,isto é, sua densidade é:

$$f(x) = \frac{c}{x^{c+1}}, x \geq 1, c > 0.$$

Encontre a distribuição de Y_1 e Y_n, o mínimo e o máximo de $X_1, X_2, \dots, X_n$

2. Mostre que se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias iid exp (λ_i) e $Y = \min X_i$, então $Y \sim$exp $(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

3. Sejam Y_1 e Y_n o mínimo e o máximo de uma amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$ extraída de uma distribuição $U(a, b)$.

a) Mostre que a densidade conjunta de Y_1 e Y_n para $n = 3$ é dada por

$$f(y_1, y_n) = \frac{6}{(b-a)^3}(y_n - y_1), a < y_1 < y_n < b\ .$$

b) Estenda o resultado para n geral.

c) Mostre que para o caso de $U(0,1)$ tem-se que

$$cov(Y_1, Y_n) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

4. Suponha que os tempos de vida (em horas) de duas baterias sejam variáveis aleatórias iid exp(λ). As baterias estão conectadas em série, de forma que o sistema funciona se, e somente se, ambas estão funcionando.

a) Calcule a probabilidade que o sistema funcione mais de t horas $(t > 0)$;
b) Qual o tempo de vida esperado do sistema?
c) Avalie os itens a) e b) se λ = 1/3.

DISTRIBUIÇÃO E ESPERANÇA CONDICIONAL.

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, c.c. \end{cases}$$

Calcule $f(y|x)$. Reconhece essa distribuição?

6. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, 0 \leq x \leq y \\ 0, c.c. \end{cases}$$

Calcule $f(y|x)$. Reconhece essa distribuição?

7. Seja $(X,Y) \sim U(R)$, sendo $R = \{(x,y)/\ 0 < x < y < 1\}$.
Calcule e identifique as distribuições condicionais de X/Y e Y/X.

8. Sejam X e Y va's com densidade conjunta $f(x,y) = 8xy,\ 0 < x < y < 1$.
Obtenha a esperança e variância de X dado Y.

9. Considere o seguinte experimento de duas etapas: primeiro, escolhe-se um ponto *x* de acordo com a distribuição uniforme em (0,1); depois, escolhe-se um ponto y de acordo com a distribuição uniforme em (*-x, x*). Se o vetor aleatório (*X, Y*) representa o resultado do experimento.

a) Qual será a densidade conjunta de *X* e *Y*?
b) A densidade marginal de *Y*?
c) A densidade condicional de *X* dada *Y*?

10. Obtenha a conjunta de X e Y e a marginal de Y, sendo dados:

$$p_X(x) = x/3\ , x = 1,2;\ p(y/x) = \binom{x}{y}\left(\frac{1}{2}\right)^x, y \in \mathbb{N}, y \leq x \text{ e } x = 1,2.$$

11. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes tais que $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(1,4)$. Qual a distribuição do vetor (X,Y)? E a distribuição condicional de $2X/Y = y$?

12. Suponha que o número de passas num bolo inglês tenha distribuição de Poisson de parâmetro 60. Um jogador compra um bolo tira todas as passas uma por uma e reparte as passas entre ele e você da seguinte maneira: depois da extração de cada passa ele joga uma moeda equilibrada, dando a passa a você se der cara, comendo-a ele mesmo se der coroa. Qual a distribuição do número de passas que você recebe? A esperança?

13. Seja $Y \sim Poisson(\lambda)$ e $X/Y = n \sim Bin(n,p)$.

a) Calcule a distribuição de X.
b) Calcule a distribuição condicional de Y dado X.

14. Sejam *X* e *Y* independente tais que $X \sim Bin(m,p)$ e $Y \sim Bin(n,p)$.
Obtenha a esperança condicional de X dada $X + Y$.

15. Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica definida por

$$P(X_i = n) = p(1-p)^n, n = 0,1,2\ldots; i = 1,2.$$

16. Determine a distribuição condicional de X_1 dada $X_1 + X_2$.

17. Sejam X e Z variáveis aleatórias no mesmo espaço de probabilidade.

a) Mostre que para A e B borelianos,

$$P(Z \in B, X \in A|\ X = x) = \begin{cases} P(Z \in B|\ X = x), se\ x \in A \\ 0, \qquad se\ x \notin A. \end{cases}$$

b) Mostre que se
$P(Z \in B|\ X = x) \geq 1/2\ , \forall x \in A$, então $P(Z \in B|\ X \in A) \geq 1/2$.

c) Sejam X, Y independentes tais que $P(Y \geq 0) \geq 1/2$. Demonstre que
$P(X + Y \geq a|\ X \geq a) \geq 1/2$.

18. Um milionário excêntrico, uma vez por semana, deixa seu escritório com X milhares de reais no bolso. Ao caminhar para a sua casa vai distribuindo esse dinheiro aos eventuais pedintes que encontra. Admita que X tem densidade de probabilidade $f_X(x) = x/8, 0 < x < 4$ e, também que o dinheiro que lhe resta ao chegar em casa, denotado por Y, tem probabilidade uniforme entre zero e o dinheiro como que deixou o escritório.

a) Calcule a densidade conjunta entre X e Y.

b) Determine a densidade marginal de Y.

19. O número de acidentes que ocorrem em certa fábrica em uma semana é uma variável aleatória com média μ e variância σ^2. Os números de indivíduos feridos nos diferentes acidentes são independentes e identicamente distribuídos com média ξ e variância τ^2, e são independentes do número de acidentes. Determine a média e a variância do número de indivíduos feridos em uma semana.

20. Seleciona-se ao acaso um número entre 0 e1. Se x é o número selecionado, lança-se n vezes (independentemente) uma moeda com probabilidade "x" de dar cara. Seja Y a variável aleatória que representa o número de caras obtidas. Calcule a esperança e a variância de Y.

21. Suponha que $X \sim N(\mu, 1)$ e $Y/X = x \sim N(x/2\,, \sigma^2)$.

a) Qual a distribuição de $Z = E(Y/X)$?

b) Quanto vale $E(Y)$?

22. Sejam X e Y integráveis. Prove que X e $Y - E(Y/X)$ são não correlacionadas.

23. Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que Y tem esperança finita.
Demonstre que $var(Y) = E[var(Y/X)] + var[E(Y/X)]$, i.e., a variância de Y é a soma da esperança da variância condicional e a variância da esperança condicional.

24. a) Seja $Y \sim N(0{,}4)$ e seja X uma variável aleatória tal que

$$E(X|Y) = aY + b, \ \text{a, b} \in \mathbb{R}.$$

Encontre as constantes $a\ e\ b$ de forma que $E(X) = 1$ e $E(XY) = 2$.

b) Se $Y \sim Bernoulli(p)$, $E(X|Y = 0) = 1$ e $E(X|Y = 1) = 2$, obtenha $E(X)$.

25. As variáveis X e Y têm densidade conjunta dada por:

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy, 0 < x < y, 0 < y < 2.$$

Calcule a covariância. As variáveis são independentes?

26. As variáveis X e Y são tais que $var(X + Y) = 0$. Determine o coeficiente de correlação entre elas.

27. Sejam X e Y variáveis aleatórias com segundos momentos finitos, e seja Z uma outra variável aleatória. Demonstrar a seguinte fórmula

$$\mathrm{cov(X, Y) = E[cov}(X, Y)/Z] + \mathrm{cov[E(X/Z), E(Y/Z)]}.$$