Exercícios Extra P3 Pré-Prob

PET ESTATÍSTICA

Tente resolver antes de ver as respostas!

Séries: Prove que a esperança de uma variável X~Poisson é λ.

Temos que, para variáveis discretas:

$E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i . p(x_i)$: Esperança

Como $X \sim Poisson(\lambda)$, $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, \ldots$

Por demonstrar: $E(X) = \lambda$.

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x\, p(x)$$

$$E(X) = \sum_{x=0}^{n} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{n} \frac{x\lambda^x}{x!}$$

pois, para $x=0$: $\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!} = e^{-\lambda}$, que foi "para fora" do somatório.

não depende de x

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{n} \frac{\cancel{x}\lambda^x}{\cancel{x}(x-1)!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{n} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$$

Aqui, lembramos da **Série de Taylor**: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$

Aplicando nesse caso, temos $\sum_{x=1}^{n} \frac{\lambda^x}{(x-1)!}$ e consideramos $x = y+1$. Assim,

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{n} \frac{\lambda^{y+1}}{(y+1-1)!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{n} \frac{\lambda^y . \lambda^1}{y!}$$

$$E(X) = e^{-\lambda} . \lambda \sum_{x=1}^{n} \frac{\lambda^y}{}$$: se $x=1$ e $x=y+1$,

$$E(X) = e^{-\lambda}.\lambda \sum_{x=1}^{n} \frac{\lambda^y}{y!}$$

: se $x=1$ e $x=y+1$, $1=y+1$. Então $y=1-1=0$.

$$E(X) = e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^y}{y!} \rightarrow \text{Taylor}$$

$$E(X) = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}$$

$$E(X) = \lambda e^{-\lambda+\lambda}$$

$$E(X) = \lambda e^{0}$$

$$\boxed{E(X) = \lambda}$$

Para outras provas de esperança, como a do modelo Geométrico, pode ser útil a **série Geométrica**: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$

Análise Combinatória: (Exercícios da UNICAMP disponíveis em: https://www.ime.unicamp.br/~chico/ma091verao/ma091_ex13.pdf)

4. Dos números de quatro algarismos, quantos são pares?

Os números de 4 algarismos vão de 1000 a 9999.

Para serem pares, devem terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

5 opções

não pode ser 0

$$\underline{9}\,.\,\underline{10}\,.\,\underline{10}\,.\,\underline{5} = 4500$$

5. Dos números de quatro algarismos, quantos não têm algarismos repetidos?

não pode o 1º algarismo (anterior)

não pode ser 0 ← $\underline{9}\,.\,\underline{9}\,.\,\underline{8}\,.\,\underline{7} = 4536$

↳ não pode o 2º

↳ não pode o 3º

15. Seu irmão mais novo tem que colorir um mapa da região sudeste, sem repetir cores. Se ele tem 6 lápis de cor diferentes, de quantas maneiras distintas pode pintar o mapa?

Como o sudeste tem 4 estados, pensando em 6 cores distintas,

$$\underline{6}.\underline{5}.\underline{4}.\underline{3} = 360$$

17. Dois prêmios iguais serão sorteados entre vinte pessoas, das quais doze são mulheres e oito são homens. Admitindo que uma pessoa não possa ganhar os dois prêmios,

a) De quantas maneiras diferentes pode-se distribuir os prêmios entre as pessoas?

Dois prêmios e vinte pessoas:

$$\binom{20}{2} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20.19.\cancel{18!}}{2!\,\cancel{18!}} = \frac{\cancel{20}.19}{\cancel{2}.1} = 10.19 = 190$$

b) De quantas maneiras diferentes pode-se distribuir os prêmios se um deve ser concedido a uma mulher e o outro a um homem.

1 prêmio e uma mulher: $\binom{12}{1} = \frac{12!}{1!\,0!} = 12$

1 prêmio e um homem: $\binom{8}{1} = 8$

$$\underset{\text{"e"}}{12.8} = 96$$

18. Um motoboy precisa entregar quatro pizzas. De quantas maneiras diferentes ele pode visitar os quatro clientes da pizzaria?

Como cada caminho é diferente, a "ordem importa". Isso recai em uma permutação simples, ou seja, $4! = 24$.

23. Dos 420 candidatos a um ingresso gratuito para o show de Lady Fanha, apenas 3 serão selecionados pela produção do evento. Quantos grupos diferentes de três pessoas podem ser sorteados?

Aqui, dentro de cada grupo, se escolhermos "João, Lucas e Ana" ou "Lucas, Ana e João", o grupo permanece o mesmo, ou seja, a ordem não importa. Assim, temos uma combinação das 3 pessoas dos grupos em 420 candidatos:

$$\binom{420}{3} = 12\,259\,940 \text{ (grupos possíveis)}$$