Teoria Estatística - Problema de Monty Hall

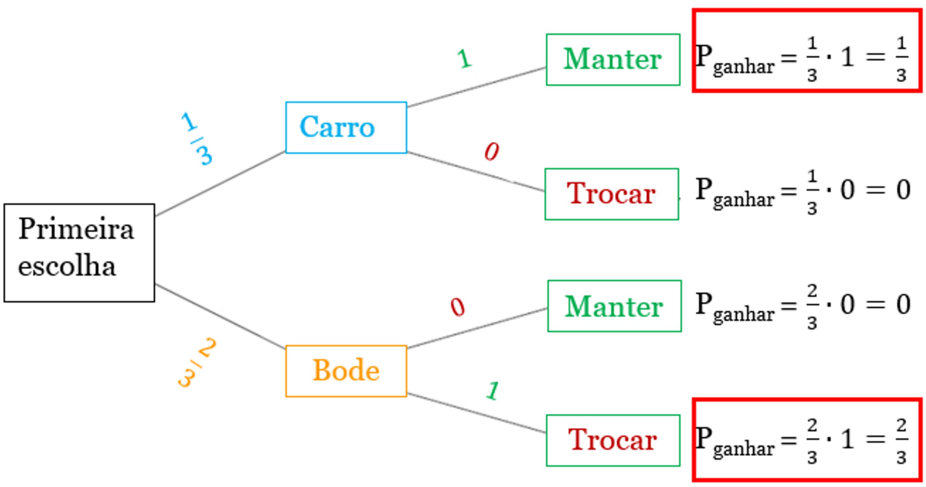
PET ESTATÍSTICA

Contexto:

Imagine que você está de frente para três portas numeradas – 1, 2 e 3 – e o apresentador diz:
– Atrás de uma dessas portas tem um carro; mas atrás de cada uma das outras duas tem um bode. Escolha uma porta e leve para casa o que estiver atrás dela.
Você vai lá e escolhe uma das três portas; mas antes que você possa abri-la, o apresentador (que sabe exatamente onde está o carro) pede para você esperar e ele abre uma das portas não escolhidas, mostrando um dos bodes. Nesse momento ele faz a seguinte pergunta a você:
– Você quer ficar com a porta que você escolheu ou quer trocá-la pela outra porta fechada?
De <https://clubes.obmep.org.br/blog/probabilidades-o-problema-de-monty-hal/>

Trocando a porta, há mais chances de ganhar o carro, apesar de contrário à intuição. A probabilidade de acerto entre as duas portas ao trocar a escolha inicial, nesse caso, não é 50% e sim 66,667%.

Observe o esquema a seguir, disponível no mesmo link acima:



Vamos entender o porquê disso ocorrer usando a teoria:

Desenvolvimento Teórico:

Definindo os eventos:

P_1: o prêmio estar na porta 1.

P_2: o prêmio estar na porta 2.

P_3: o prêmio estar na porta 3.

$P(P_i)$ = probabilidade do prêmio estar na porta i (porta qualquer)

Como temos 1 carro e 2 bodes entre 3 portas totais, há

$\frac{1 \text{ carro}}{3 \text{ portas}} = \frac{1}{3}$ de chance de acertar (prêmio estar na porta i)

Logo:

$$P(P_i) = P(P1) = P(P2) = P(P3) = \frac{1}{3}$$

Para exemplificar, vamos jogar o jogo e escolher a porta 1.

Vamos supor que a porta aberta foi a 3, ou seja, continha um bode.

Então, somos questionados se queremos trocar para a porta 2.

Assim, queremos descobrir se a troca é mais vantajosa.

Isso implica no cálculo da probabilidade de:

"prêmio estar na porta 2 dado que a 3 foi aberta"

Ou seja, $P(P2/A3)$, com A3: Porta 3 aberta.

Pelo **Teorema de Bayes**:

$$P(P2/A3) = \frac{P(A3/P2) \cdot P(P2)}{P(A3)}$$

Pela **Lei da Probabilidade Total**:

$$P(A3) = \sum_{i=1}^{3} P(A_3/P_i)\,P(P_i)$$

$$P(A_3) = P(A_3|P_1)P(P_1) + P(A3/P2)P(P2) + P(A_3/P3)P(3)$$

Agora, $P(A3|P1)$ = abrir a porta 3 dado que a certa é a 1:
Se a 1 é a certa, a 2 e a 3 tem bodes, logo a probabilidade de abrir a 3 é $\frac{1}{2}$.

$P(A_3|P_2)$ = abrir a porta 3 dado que a certa é a 2:

Se a 2 é a certa, só resta a porta 3 para ser aberta, pois a porta escolhida (1) nunca é aberta. Logo, $P(A3|P2) = 1$.

$P(A3|P_3)$ = abrir a porta 3 dado que a certa é a 3:

A porta certa (carro) nunca é aberta, logo, $P(A_3|P3) = 0$.

Assim,

$$P(A_3) = P(A_3|P_1)P(P_1) + P(A3/P2)P(P2) + P(A_3/P3)P(3)$$

$$P(A3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{3} + 0\cdot\cancel{\frac{1}{3}}$$

$$P(A3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Dessa forma,

$$P(P2/A3) = \frac{P(A3/P2) . P(P2)}{P(A3)}$$

$$P(P2|A3) = \frac{1 . \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} . \frac{2}{1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Portanto, trocando a escolha da porta 1 para a 2, dado que a porta 3 foi aberta, a chance de acertar o prêmio é $\frac{2}{3}$.