UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista 1 - Módulo 2 - CM311

1. Encontre os pontos críticos da função dada:

   (a) $f(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 36\,x$ (b) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - x + 1}$ (c) $f(x) = x^{4/5}\big(x-4\big)^2$

   (d) $f(x) = 2\,\cos\,x + \mathrm{sen}^2 x$ (e) $f(x) = x^2\,e^{-3\,x}$

2. Encontre os valores máximo e mínimo globais da função f dada, no intervalo I dado.

   (a) $f(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 - 12\,x + 1\,,\quad I = \big[-2, 3\big]$

   (b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}\,,\quad I = \big[0.2, 4\big]$

   (c) $f(x) = 2\,\cos\,x + \mathrm{sen}\,2\,x\,,\quad I = \big[0, \pi/2\big]$

   (d) $f(x) = x\,e^{-x^2/8}\,,\quad I = \big[-1, 4\big]$

   (e) $f(x) = \ln\,\big(x^2 + x + 1\big)\,,\quad I = \big[-1, 1\big]$

   (f) $f(x) = x^5 - x^3 + 2\,,\quad I = \big[-1, 1\big]$

   (g) $f(x) = e^x + e^{-2\,x}\,,\quad I = \big[0, 1\big]$

   (h) $f(x) = x\sqrt{x - x^2}\,,\quad I = \big[0, 1\big]$

3. Dada a função $f(x) = 1 + (x - \alpha)^n$, determine e classifique os pontos críticos de f no caso em que:

   (a) $n = 2$ (b) $n = 3$ (c) $n = 4$

4. Nos itens abaixo, verifique que a função f dada satisfaz às hipóteses do TVM no intervalo dado, e então, encontre todos os pontos x^* que satisfazem à conclusão do TVM.

   (a) $f(x) = 2\,x^2 - 3\,x + 1\,,\quad I = \big[0, 2\big]$

   (b) $f(x) = e^{-2\,x}\,,\quad I = \big[0, 3\big]$

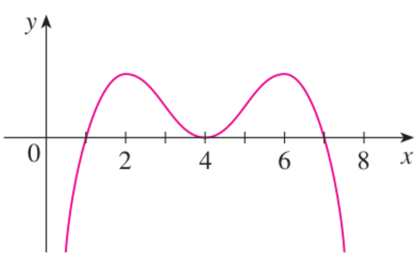
5. Mostre que a equação $2\,x + \cos\,x = 0$ tem exatamente uma raiz real.

6. Mostre que a equação $x^3 - 15\,x + c = 0$ tem, no máximo, uma raiz no intervalo $\big[-2, 2\big]$.

7. Admita que as funções f e g sejam contínuas em $\big[a, b\big]$ e deriváveis em $\big(a, b\big)$. Admita também que $f(a) = g(a)$ e que $f'(x) < g'(x)$ para $a < x < b$. Prove que $f(b) < g(b)$.

8. Mostre que $\sqrt{1+x} < 1 + \dfrac{1}{2}x$, para todo $x > 0$.

9. Considere o seguinte gráfico:



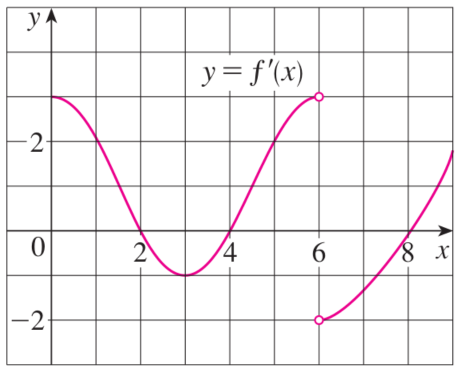
   determine as abscissas x dos pontos de inflexão de f considerando que

(a) o gráfico acima é o gráfico de f ;

(b) o gráfico acima é o gráfico de f' ;

(c) o gráfico acima é o gráfico de f'' .

10. O gráfico da derivada f' de uma função contínua f é mostrado abaixo.



(a) Em que intervalos f é crescente? E onde é decrescente?

(b) Para quais valores de x a função f tem um máximo local? E um mínimo local?

(c) Em que intervalos a concavidade do gráfico de f é voltada para cima? E onde é voltada para baixo?

(d) Determine as abscissas x dos pontos de inflexão de f.

(e) Supondo que $f(0) = 0$, dê um esboço do gráfico de f .

11. Para cada função f nos itens abaixo, determine:

(i) todas as retas assíntotas;

(ii) os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;

(iii) os valores máximos locais e os valores mínimos locais;

(iv) os intervalos de mesma concavidade e os pontos de inflexão;

(v) um esboço do gráfico.

(a) $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

(c) $f(x) = e^{-x^2}$

(d) $f(x) = \ln(1- \ln x)$

Respostas

1. (a) $x_1 = -2$ e $x_2 = 3$; (b) $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$; (c) $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{8}{7}$ e $x_3 = 4$;

   (d) $x = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$; (e) $x_1 = 0$ e $x_2 = \dfrac{2}{3}$

2. (a) $f(-1) = 8$, $f(2) = -19$ (b) $f(0.2) = 5.2$, $f(1) = 2$ (c) $f(\pi/6) = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$, $f(\pi/2) = 0$

   (d) $f(2) = 2/\sqrt{e}$, $f(-1) = -1/\sqrt[8]{e}$ (e) $f(1) = \ln 3$, $f(-\dfrac{1}{2}) = \ln \dfrac{3}{4}$

   (f) $f\Big(-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\Big) = 2 + \dfrac{6}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}}$, $f\Big(\sqrt{\dfrac{3}{5}}\Big) = 2 - \dfrac{6}{25}\sqrt{\dfrac{3}{5}}$

   (g) $f(1) = e + e^{-2}$, $f(\frac{1}{3}\ \ln 2) = 2^{1/3} + 2^{-2/3}$ (h) $f(\dfrac{3}{4}) = \dfrac{3\sqrt{3}}{16}$, $f(0) = 0 = f(1)$

3. (a) $x = \alpha$: ponto de mínimo global (b) $x = \alpha$: ponto de inflexão

   (c) $x = \alpha$: ponto de mínimo global

4. (a) $x^* = 1$ (b) $x^* = -\dfrac{1}{2}\ln\Big[\dfrac{1}{6}\big(1 - e^{-6}\big)\Big]$

5. Use o TVI para garantir que a equação tem ao menos uma raiz no intervalo $\big[-\pi, \pi\big]$. Admita que existam 2 raízes x_1 e x_2, com $x_1 < x_2$, e use a conclusão do Teorema de *Rolle* no intervalo $\big[x_1, x_2\big]$ para gerar uma contradição. (Observe que a derivada da função $2\,x + \cos x$ nunca se anula!)

6. Proceda como na questão anterior.

7. Aplique o TVM à função $h(x) = f(x) - g(x)$.

8. Faça $f(x) = \sqrt{1+x}$, $g(x) = \dfrac{1}{2}x$ e utilize o resultado da questão anterior considerando $[a, b] = [0, \alpha]$, onde $\alpha > 0$ é um número qualquer.

9. (a) 3 e 5 (b) 2, 4 e 6 (c) 1 e 7

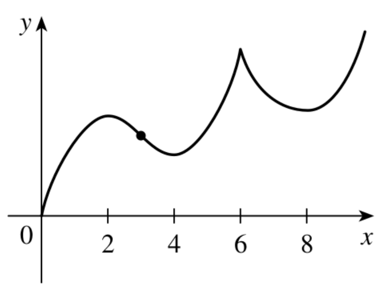
10. (a) f é crescente nos intervalos $\big(0, 2\big)$, $\big(4, 6\big)$ e $\big(8, +\infty\big)$; f é decrescente em $\big(2, 4\big)$ e $\big(6, 8\big)$

    (b) f assume máximo local em $x = 2$ e $x = 6$; f assume mínimo local em $x = 4$ e $x = 8$

    (c) Concavidade voltada para cima nos intervalos $\big(3, 6\big)$ e $\big(6, +\infty\big)$; concavidade voltada para baixo no intervalo $\big(0, 3\big)$

    (d) 3

    (e) Esboço do gráfico de f:



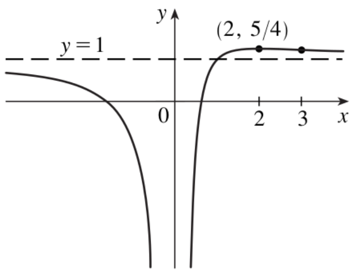
11. (a) (i) Reta assíntota vertical: $x = 0$; Reta assíntota horizontal: $y = 1$

    (ii) Crescente em $\big(0, 2\big)$; decrescente em $\big(-\infty, 0\big)$ e em $\big(2, +\infty\big)$

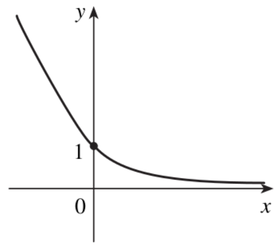
    (iii) Valor máximo local (e global): $f(2) = \dfrac{5}{4}$

    (iv) Concavidade para cima em $\big(3, +\infty\big)$; concavidade para baixo em $\big(-\infty, 0\big)$ e em $\big(0, 3\big)$; ponto de inflexão: $\big(3, \frac{11}{9}\big)$

(a) (v) Esboço do gráfico de f :



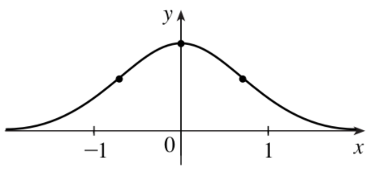
(b) (v) Esboço do gráfico de f :



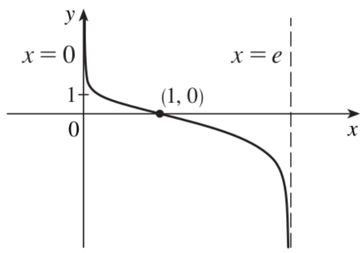
(b) (i) Reta assíntota horizontal: $y = 0$ (ii) Decrescente em $\big(-\infty, +\infty\big)$; (iii) Nenhum
(iv) Concavidade para cima em $\big(-\infty, +\infty\big)$;

(c) (i) Reta assíntota horizontal: $y = 0$ (ii) Crescente em $\big(-\infty, 0\big)$; decrescente em $\big(0, +\infty\big)$;
(iii) Valor máximo local (e global): $f(0) = 1$; (iv) Concavidade para cima em $\big(-\infty, -1/\sqrt{2}\big)$ e em $\big(1/\sqrt{2}, +\infty\big)$, concavidade para baixo em $\big(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\big)$; pontos de inflexão: $\big(\pm 1/\sqrt{2}, e^{-1/2}\big)$

(c) (v) Esboço do gráfico de f :



(d) (v) Esboço do gráfico de f :



(d) (i) Retas assíntota verticais: $x = 0$ e $x = e$; (ii) Decrescente em $\big(0, e\big)$; (iii) Nenhum
(iv) Concavidade para cima em $\big(0, 1\big)$ e concavidade para baixo em $\big(1, e\big)$; ponto de inflexão: $\big(1, 0\big)$