UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista 2 - Módulo 2 - CM311

1. Admita que $f(x) > 0$ e que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to a} h(x) = 1\,, \quad \lim_{x\to a} p(x) = +\infty\,, \quad \lim_{x\to a} q(x) = +\infty\,;$$

decida quais dos limites abaixo são formas indeterminadas. Para aqueles que não forem, calcule o limite, quando possível.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{p(x)}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{p(x)}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{f(x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)}$

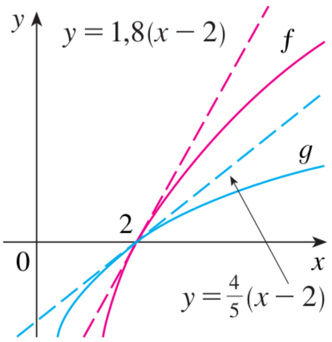
(f) $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)p(x)$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to a} h(x)p(x)$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to a} p(x)q(x)$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[f(x) - p(x)\big]$

(j) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[p(x) - q(x)\big]$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[p(x) + q(x)\big]$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[f(x)\big]^{g(x)}$ (m) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[f(x)\big]^{p(x)}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[h(x)\big]^{p(x)}$

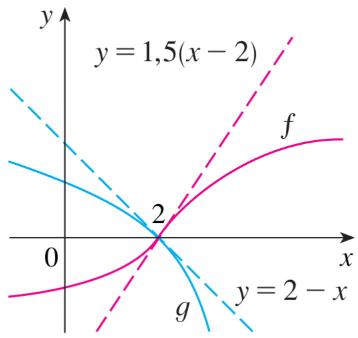
(o) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[p(x)\big]^{f(x)}$ (p) $\displaystyle\lim_{x\to a} \big[p(x)\big]^{q(x)}$ (q) $\displaystyle\lim_{x\to a} \sqrt[q(x)]{p(x)}$

2. Nos itens abaixo, utilize os gráficos de f e g e suas retas tangentes em $(2,0)$ para determinar o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(a)



(b)



3. Nos itens abaixo, utilize a Regra de *l'Hôspital*, quando apropriado, para calcular o limite.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2\,x^2 + 1}{x^3 - 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2\,x} - 1}{\text{sen}\ x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to \pi/2} \frac{1 - \ \text{sen}\ x}{1 + \ \cos\, 2\,x}$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\, x}{x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1 + 2\,x} - \sqrt{1 - 4\,x}}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ (g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,3^x}{3^x - 1}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln\, x}\right]$

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$ (j) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \big[x - \ln\, x\big]$ (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\sqrt{x}}$ (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(1 - 2\,x\big)^{1/x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \big(4\,x + 1\big)^{\text{cotg}\ x}$ (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \big(\cos\, x\big)^{1/x^2}$

4. Prove que: (a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad (n \in \mathbb{N})$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln\, x}{x^p} = 0 \quad (p > 0)$

5. O que ocorre ao usar-se a Regra de *l'Hôspital* nos casos abaixo? Calcule o limite utilizando outro método.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{\sec\, x}{\text{tg}\ x}$

6. Nos itens abaixo, utilize a derivação logarítmica para calcular a derivada da função $y(x)$.

(a) $y = (2x+1)^5(x^4-3)^6$ (b) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x^4+1}}$ (c) $y = x^x$

(d) $y = x^{\text{ sen } x}$ (e) $y = (\cos x)^x$ (f) $x^y = y^x$

7. Considere o conjunto $A = \big[0,2) \cup (2,4\big] \cup \big\{5\big\}$.

(a) Determine o conjunto $int(A)$, dos pontos interiores de A. O conjunto A é aberto? Justifique.

(b) Determine o conjunto ∂A, dos pontos de fronteira de A. O conjunto A é fechado? Justifique.

(c) O conjunto A é compacto? O conjunto $A \cup \partial A$ é compacto? Justifique.

Definição. Sejam $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto não-vazio. Define-se o *diâmetro de* K (e denota-se por $diam(K)$) como sendo o número dado pela relação:

$$diam(K) = \max_{x\,,\,y\,\in\,K} dist(x,y) = \max_{x,\,y\,\in K} |x-y|\,.$$

8. (**Teorema dos Compactos Encaixantes**.) Considere a coleção de conjuntos compactos $\big\{K_n\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ encaixantes não-vazios, ou seja, $K_1 \supset K_2 \supset ... \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \cdots$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Prove que $K = \cap K_n$ é um conjunto compacto, e que

(b) Se $K \neq \emptyset$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} diam(K_n) = 0$ então $K = \cap K_n = \big\{x^*\big\}$.

9. Seja $f : Dom(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x) = \sqrt{9-(x-2)^2}$, para todo $x \in Dom(f)$.

(a) Determine os conjuntos $int\big(Dom(f)\big)$ e $\partial\big(Dom(f)\big)$.

(b) $Dom(f)$ é um conjunto aberto? É um conjunto fechado? É um conjunto compacto?

(c) $Dom(f')$ é um conjunto aberto? É um conjunto fechado? É um conjunto compacto?

(d) Todos os pontos críticos de f são pontos interiores de $Dom(f)$?

(e) A função f satisfaz todas as hipóteses do *Teorema de Weierstrass*?

(f) Determine os valores máximos/mínimos locais/globais de f.

(g) O conjunto $Im(f)$ é aberto? É fechado? É compacto?

(h) O conjunto $Im(f')$ é aberto? É fechado? É compacto?

(i) Use $f''(x)$ para estudar a concavidade do gráfico de f.

(j) Dê esboços detalhados dos gráficos de f e de f'.

10. Para cada uma das funções f nos itens a seguir, identifique os seguintes elementos abaixo e dê o seu gráfico:

A: $Dom(f)$

B: Pontos de interseção do gráfico de f com os eixos coordenados

C: Aspectos de simetria (função par, função ímpar, função periódica)

D: Retas assíntotas (horizontais, verticais, oblíquas)

E: Intervalos de crescimento ou decrescimento

F: Valores máximos e valores mínimos (locais e globais)

G: Concavidade e Pontos de Inflexão

(a) $f(x) = x(x-4)^3$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ (c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+3}$ (d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$ (f) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ (g) $f(x) = x - \ln x$ (h) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$

(i) $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} + e^{-x}$ (j) $f(x) = \sqrt{x^2+4\,x}$

11. Seja a função $f(x) = x^2 \ln x$.

(a) Faça o gráfico de f.

(b) Utilize a Regra de *l'Hôspital* para explicar o comportamento de f quando $x \to 0$.

(c) Estime o valor mínimo de f e os intervalos de mesma concavidade. Então, use o cáculo para encontrar os valores exatos.

12. Nos itens abaixo, descreva a mudança no gráfico de f à medida que a constante c varia; investigue como os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão movem-se quando c varia. Identifique o valor de c para o qual o aspecto básico do curva muda.

(a) $f(x) = e^x + c\,e^{-x}$ (b) $f(x) = \dfrac{c\,x}{1 + c^2x^2}$

13. Investigue a família de curvas dadas for $f(x) = x\,e^{-c\,x}$, em que c é uma constante real. Calcule os limites quando $x \to \pm\infty$. Identifique qualquer valor intermediário de c onde mude a forma básica do gráfico. Estude a localização dos pontos de máximo e de mínimo e dos pontos de inflexão conforme c varia.

14. (a) Investigue a família de funções polinomiais dada pela equação $f(x) = c\,x^4 - 2\,x^2 + 1$. Para quais valores de c a curva tem pontos de mínimo?

(b) Mostre que os pontos de máximo e de mínimo para cada curva da família estão sobre a parábola $y = 1 - x^2$. Ilustre fazendo o gráfico dessa parábola e de vários membros da família.

Respostas

1. (a) Indeterminação (do tipo $\frac{0}{0}$) (b) 0 (c) 0 (d) $+\infty$

   (e) Indeterminação (do tipo $\frac{\infty}{\infty}$) (f) Indeterminação (do tipo $0 \cdot \infty$) (g) $+\infty$

   (h) $+\infty$ (i) $-\infty$ (j) Indeterminação (do tipo $\infty - \infty$) (k) $+\infty$

   (l) Indeterminação (do tipo 0^0) (m) 0 (**Cuidado: 0^∞ não é indeterminação!**)

   (n) Indeterminação (do tipo 1^∞) (o) Indeterminação (do tipo ∞^0) (p) $+\infty$

   (q) Indeterminação (do tipo ∞^0)

2. (a) $\frac{9}{4}$ (b) $-\frac{3}{2}$

3. (a) $-\frac{1}{3}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{4}$ (d) $-\infty$ (e) 3 (f) $\frac{1}{2}$ (g) $1/\ln 3$

   (h) $\frac{1}{2}$ (i) $\frac{1}{2}$ (j) $+\infty$ (k) 1 (l) e^{-2} (m) e^4 (n) $1/\sqrt{e}$

4. (a) Aplique a regra de l'Hôspital n vezes para obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty$

   (b) Aplique a regra de l'Hôspital para obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x \cdot p \cdot x^{p-1}} = 0$

5. (a) 1 (Ao usar-se a regra de l'Hôspital duas vezes retorna-se à fração inicial)

   (b) 1 (Ao usar-se a regra de l'Hôspital duas vezes retorna-se à fração inicial)

6. (a) $y' = (2x+1)^5(x^4-3)^6\left(\frac{10}{2x+1} + \frac{24x^3}{x^4-3}\right)$ (b) $y' = \sqrt{\frac{x-1}{x^4+1}}\left(\frac{1}{2x-2} - \frac{2x^3}{x^4+1}\right)$

   (c) $y' = x^x(1+\ln x)$ (d) $y' = x^{\operatorname{sen} x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} + \cos x \ln x\right)$ (e) $y' = (\cos x)^x(-x \operatorname{tg} x + \ln \cos x)$

   (f) $y' = \frac{y\big(x \ln y - y\big)}{x\big(y \ln x - x\big)}$

7. (a) $int(A) = (0,2) \cup (2,4)$. A não é aberto pois $A \neq int(A)$ (note que os pontos 0,4 e 5 pertencem a A mas não são pontos interiores de A).

   (b) $\partial(A) = \{0,2,4,5\}$; A não é fechado pois não contém todos os seus pontos de fronteira (note que 2 é ponto de fronteira de A mas $2 \notin A$). [Outra forma de mostrar que A não é fechado é notando que seu complementar $A^c = (-\infty,0) \cup \{2\} \cup (4,5) \cup (5,+\infty)$ não é um conjunto aberto pois $2 \in A^c$ mas 2 não é ponto interior de A^c.]

   (c) A não é compacto pois não é fechado (apesar de ser limitado, já que $A \subset [0,5]$, o qual é um intervalo limitado). Por sua vez, o conjunto $A \cup \partial A = [0\,,4] \cup \{5\}$ é fechado (pois contém os seus pontos de fronteira 0, 4 e 5) e é limitado (pois está contido no intervalo limitado $[0\,,5]$); portanto, $A \cup \partial A$ é um conjunto compacto.

8. (a) Dado que cada K_n é um fechado (pois é compacto) então $K = \cap K_n$ é um conjunto fechado; além disso, $K = \cap K_n \subset K_1$ e K_1 é limitado (pois é compacto). Portanto, $K = \cap K_n$ é fechado e limitado, ou seja, é compacto.

   (b) Admita que x^* e x_0 pertençam a $K = \cap K_n$ com $\lim\limits_{n\to+\infty} diam(K_n) = 0$; daí, segue que

$$|x^* - x_0| \leq diam(K_n)\,, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \quad |x^* - x_0| = \lim_{n\to+\infty} |x^* - x_0| \leq \lim_{n\to+\infty} diam(K_n) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad |x^* - x_0| = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* = x_0\,,$$

   ou seja, $K = \cap K_n$ resume-se a um único ponto.

9. (a) $Dom(f) = [-1\,,\,5]$; $\quad int(Dom(f)) = (-1, 5\,)$; $\partial(Dom(f)) = \{-1, 5\,\}$

(b) $Dom(f)$ não é um conjunto aberto porque há pontos em $Dom(f)$ que não são pontos interiores (a saber, os pontos -1 e 5). É um conjunto fechado pois contém seus pontos de fronteira (a saber, -1 e 5). [Outra forma de justificar é notando que o seu complementar é o conjunto $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$, o qual é aberto por se tratar da união de dois conjuntos abertos.] É um conjunto compacto pois é fechado e limitado.

(c) $Dom(f') = (-1, 5\,)$, o qual é um conjunto aberto; não é fechado pois não contém seus pontos de fronteira -1 e 5. Não é compacto por não ser fechado (apesar de ser limitado).

(d) Tem-se que $f'(2) = 0$ (único zero da derivada) e que não existem $f'(-1)$ e $f'(5)$, e assim 2, -1 e 5 são os três pontos críticos de f e apenas $x = 2$ é ponto interior de $Dom(f)$ (visto que -1 e 5 são pontos de fronteira).

(e) Sim, f é uma função contínua e seu domínio é um conjunto compacto.

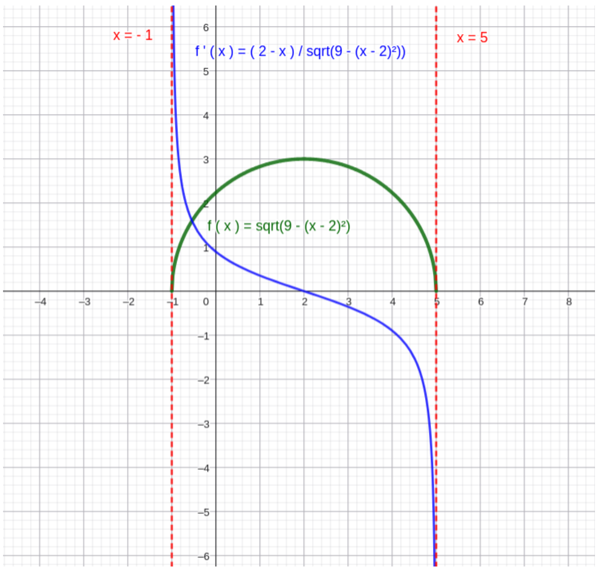
(f) $f(2) = 3$: valor máximo global; $\qquad f(-1) = f(5) = 0$: valor mínimo global.

(g) $Im(f) = [\,0\,,\,3\,]$ não é conjunto aberto pois possui pontos não-interiores (a saber, os pontos 0 e 3, os quais são ponto de fronteira de $Im(f)$). É fechado pois contém seus pontos de fronteira. É compacto, pois além de ser fechado é também limitado.

(h) $Im(f') = \mathbb{R}$ é aberto e fechado, mas não é conpacto por não ser limitado.

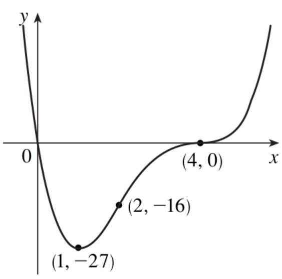
(i) $f''(x) = \dfrac{-9}{\sqrt{(9-(x-2)^2)^3}} < 0$, para todo $x \in (-1, 5)$; portanto, a concavidade do gráfico é sempre voltada para baixo.

(j) Gráficos de f e f'

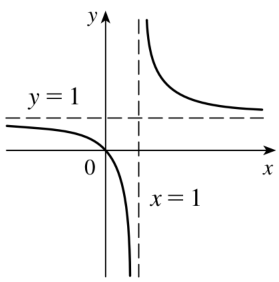


10. (a) A. $\mathbb{R}$ $\quad$ B. $(0,0)$ e $(4,0)$ $\quad$ C. Nenhuma $\quad$ D. Nenhuma $\quad$ E. Crescente em $(1, +\infty)$; Decrescente em $(-\infty, 1)$ $\quad$ F. Mínimo global: $f(1) = -27$ $\quad$ G. Concavidade para cima em $(-\infty, 2)$ e em $(4, +\infty)$; Concavidade para baixo em $(2, 4)$; Pontos de inflexão em $(2, -16)$ e $(4, 0)$

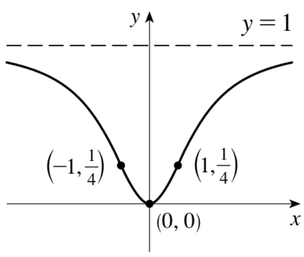
(a) (Gráfico)



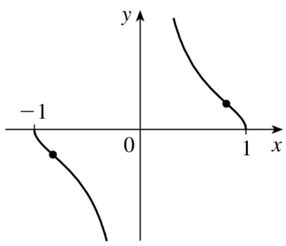
(b) (Gráfico)



(c) (Gráfico)



(d) (Gráfico)



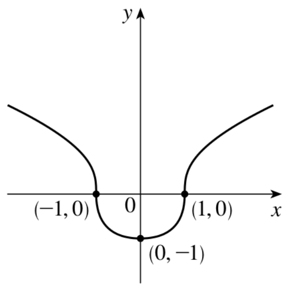
(b) A. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x \neq 1\}$ B. $(0,0)$ C. Nenhuma D. Assíntota vertical: $x = 1$; Assíntota horizontal: $y = 1$ E. Decrescente em $(-\infty, 1)$ e em $(1, +\infty)$ F. Nenhum G. Concavidade para cima em $(1, +\infty)$; Concavidade para baixo em $(-\infty, 1)$

(c) A. $\mathbb{R}$ B. $(0,0)$ C. Simetria em relação ao eixo-y D. Assíntota horizontal: $y = 1$ E. Crescente em $(0, +\infty)$; Decrescente em $(-\infty, 0)$ F. Valor mínimo global: $f(0) = 0$ G. Concavidade para cima em $(-1, 1)$; Concavidade para baixo em $(-\infty, -1)$ e em $(1, +\infty)$; Pontos de inflexão em $(\pm 1, 1/4)$

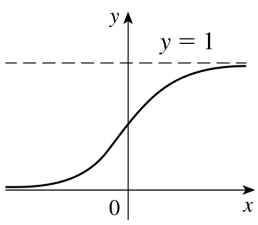
(d) A. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, |x| \leq 1\,,\, x \neq 0\}$ B. $(-1, 0)$ e $(1, 0)$ C. Simetria em relação à origem D. Assíntota vertical: $x = 0$ E. Decrescente em $(-1, 0)$ e em $(0, 1)$ F. Valor mínimo local: $f(-1) = 0 = f(1)$ G. Concavidade para cima em $(-1, -\sqrt{2/3})$ e em $(0, \sqrt{2/3})$; Concavidade para baixo em $(-\sqrt{2/3}, 0)$ e em $(\sqrt{2/3}\,, 1)$; Pontos de inflexão em $(\pm\sqrt{2/3}, \pm 1/\sqrt{2})$

(e) A. $\mathbb{R}$ B. $(-1, 0)$, $(0, -1)$ e $(1, 0)$ C. Simetria em relação ao eixo-y D. Nenhuma E. Crescente em $(0, +\infty)$; Decrescente em $(-\infty, 0)$ F. Valor mínimo global: $f(0) = -1$ G. Concavidade para cima em $(-1, 1)$; Concavidade para baixo em $(-\infty, -1)$ e em $(1, +\infty)$; Pontos de inflexão em $(\pm 1, 0)$

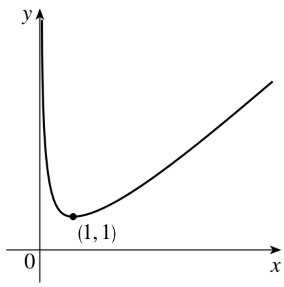
(e) (Gráfico)



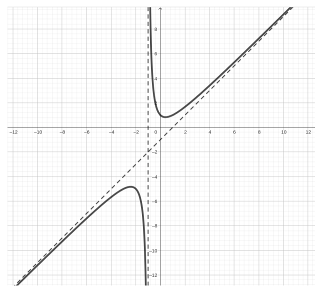
(f) (Gráfico)



(g) (Gráfico)



(h) (Gráfico)

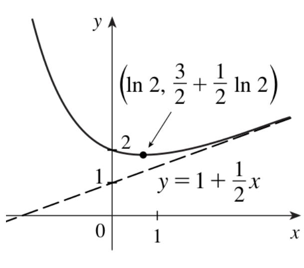


(f) A. $\mathbb{R}$ B. $(0, 1/2)$ C. Nenhuma D. Assíntotas horizontais: $y = 0$ e $y = 1$ E. Crescente em $\mathbb{R}$ F. Nenhum G. Concavidade para cima em $(-\infty, 0)$; Concavidade para baixo em $(0, +\infty)$; Ponto de inflexão em $(0, 1/2)$

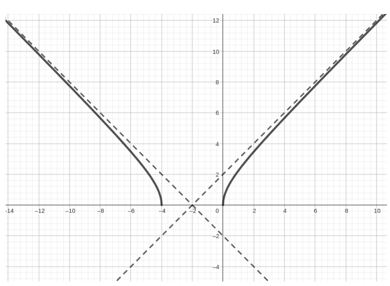
(g) A. $(0, +\infty)$ B. Nenhum C. Nenhuma D. Assíntota vertical: $x = 0$ E. Crescente em $(1, +\infty)$; Decrescente em $(0, 1)$ F. Valor mínimo global: $f(1) = 1$ G. Concavidade para cima em $(0, +\infty)$

(h) A. $\{x \in \mathbb{R}\,;\, x \neq -1\}$ B. Nenhum C. Nenhuma D. Assíntota vertical: $x = -1$; Assíntota Oblíqua: $y = x - 1$ E. Crescente em $(-\infty, -1-\sqrt{2})$ e em $(-1+\sqrt{2}, +\infty)$; Decrescente em $(-1-\sqrt{2}, -1)$ e em $(-1, -1+\sqrt{2})$ F. Valor máximo local: $f(-1-\sqrt{2}\,) = -2-2\sqrt{2}$; Valor mínimo local: $f(-1+\sqrt{2}\,) = -2+2\sqrt{2}$ G. Concavidade para cima em $(-1, +\infty)$; Concavidade para baixo em $(-\infty, -1)$

(i) (Gráfico)



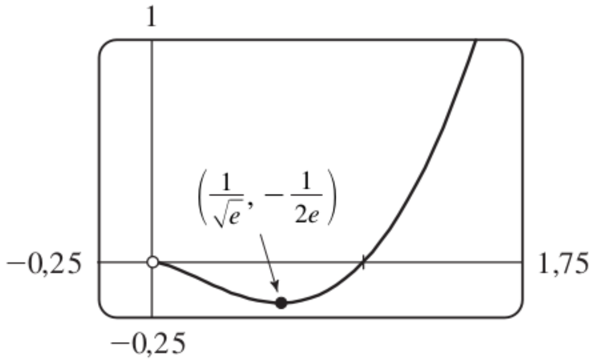
(j) (Gráfico)



(i) A. $\mathbb{R}$ B. $(0, 2)$ C. Nenhuma D. Assíntota oblíqua: $y = \dfrac{x}{2} + 1$ E. Crescente em $(\ln 2, +\infty)$; Decrescente em $(-\infty, \ln 2)$ F. Valor mínimo global: $f(\ln 2) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\ln 2$ G. Concavidade para cima em $(-\infty, +\infty)$

(j) A. $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ B. $(-4, 0)$ e $(0, 0)$ C. Nenhuma D. Assíntotas oblíquas: $y = x + 2$ e $y = -x - 2$ D. Crescente em $[0, +\infty)$; Decrescente em $(-\infty, -4]$ F. Valor mínimo global: $f(-4) = 0 = f(0)$ G. Concavidade para baixo em $(-\infty, -4)$ e em $(0, +\infty)$

11. (a) (Gráfico de f)



(b) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$ (c) Valor mínimo global: $f(1/\sqrt{e}) = -1/(2\,e)$; Concavidade para cima em $(e^{-3/2}, +\infty)$; Concavidade para baixo em $(0, e^{-3/2})$; Ponto de inflexão em $(e^{-3/2}, -\dfrac{3}{2\,e^3})$

12. (a) Para $c < 0$, não há pontos de máximo ou de mínimo, e há um ponto de inflexão, que decresce ao longo do eixo-x. Para $c > 0$, não há ponto de inflexão, e há um ponto de mínimo global.

Gráfico de (a):

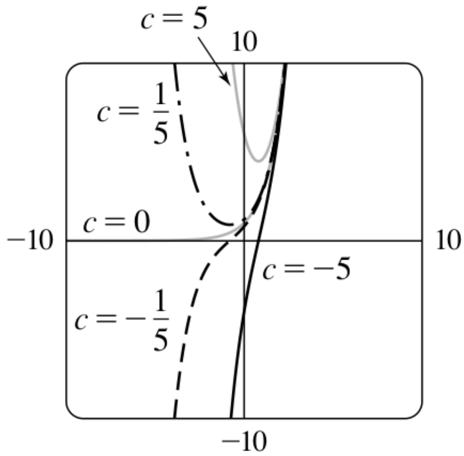
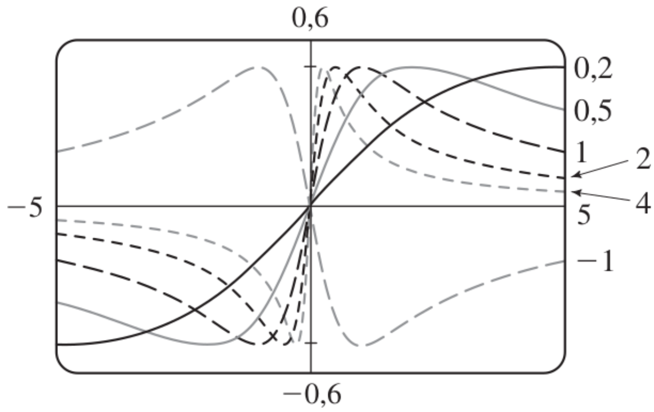


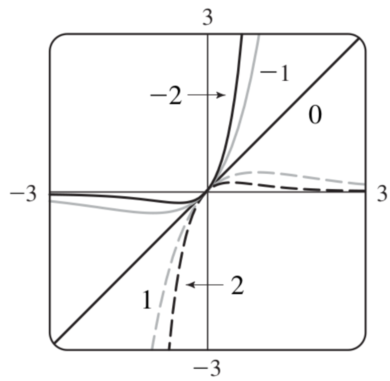
Gráfico de (b):

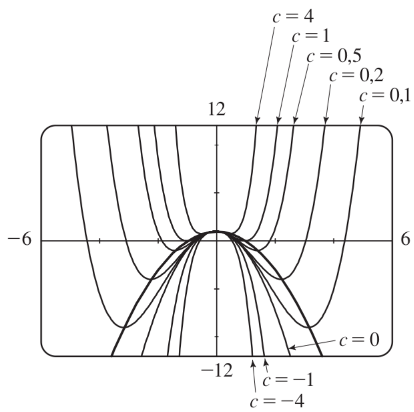


(b) Para $c > 0$, os valores máximo e mínimo são sempre $\pm\dfrac{1}{2}$, mas os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão aproximam-se do eixo-y à medida que c cresce. $c = 0$ é um valor de transição: quando c é substituído por $-c$, a curva é refletida em relação ao eixo-x.

13. Para $c > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Para $c < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

À medida que $|c|$ cresce, os pontos de máximo e de mínimo e os pontos de inflexão se aproximam da origem.





14. (a) Para valores positivos de c (b) Figura acima à direita.