Questão Extra - Estudo P2 Cálculo I

PET ESTATÍSTICA

A seguinte questão resolvida é proposta como sugestão de estudo para a segunda avaliação de Cálculo I - 2.2025. Tente fazer antes de conferir a resolução.
Considere a função:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1}, \quad x \neq 1$$

Responda:

1) Determine domínio da função;
2) Calcule os seguintes limites:
   a) $\lim_{x \to 1} f(x)$;
   b) $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.
3) Calcule o limite 2) a) pela Regra de L'Hôpital;
4) Verifique a continuidade da função em x=1.
5) Determine as interseções com os eixos coordenados.
6) Determine as assíntotas (se existirem).
7) Calcule a derivada da função.
8) Encontre os pontos críticos e classifique-os.
9) Estude o crescimento e decrescimento da função.
10) Determine a concavidade e os pontos de inflexão.
11) Determine os extremos globais.
12) Esboce o gráfico da função.

1) $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1}, \quad x \neq 1$

$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$, pois $x=1$ zera o denominador, causando uma indeterminação. Essa é a única restrição.

2) a) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x-1} = \frac{1^3 - 3.1 + 2}{1-1} = \frac{0}{0}$ (indeterminação)

Como $x=1$ zera o numerador, ele é uma raiz desse termo $(x^3 - 3x + 2)$, logo pode ser escrito como a multiplicação de $(x-1)$ por outro fator. Aqui, já vemos que será possível simplificar a função devido à presença de $(x-1)$ no denominador.

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

$$= x^3 + \cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2} - x + 2$$

$$= x^3 - 3x + 2$$

Veja que (x^2+x-2) pode ser escrito como: $(x-1)(x+2) =$

$$= x^2 + 2x - x - 2 =$$

$$= x^2 + x - 2$$

Logo,

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$$

Assim,

$$f(x) = \frac{\cancel{(x-1)}^2(x+2)}{\cancel{(x-1)}} = (x-1)(x+2)$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} (x-1)(x+2) = (1-1)(1+2) = 0.3 = 0$$

$\hookrightarrow$ O limite de $f(x)$ com $x \to 1$ é igual a 0.

b) $\lim_{x\to \pm\infty} f(x)$

* $\lim_{x\to -\infty} (x-1)(x+2) = (-\infty - 1)(-\infty + 2) = -\infty . -\infty = \infty$

* $\lim_{x\to +\infty} (x-1)(x+2) = (\infty - 1)(\infty + 2) = \infty . \infty = \infty$

3) Como $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0}$, aplicamos L'Hôpital:

$$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$$

• $\frac{d}{dx} x^3 - 3x + 2 = 3x^2 - 3$ • $\frac{d}{dx} x - 1 = 1$

Logo, $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$

Assim,

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 3}{1} = \frac{3 . 1^2 - 3}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

4) Continuidade em $x = 1$.

$f(1) = \frac{0}{0}$, logo $f(1)$ não está definida, apesar do $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

Assim, $f(x)$ possui uma descontinuidade removível em $x = 1$. Essa descontinuidade pode ser "removida" se considera-se $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 0$.

5) Interseções: $x = 0$ e $y = 0$

• $x = 0$: $f(0) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{0^3 - 3.0 + 2}{0 - 1} = \frac{2}{-1} = -2$

↳ Ponto $(0, -2)$

• $y = 0$: $0 = \frac{x^3 - 3x + 2}{x - 1}$, com denominador diferente de zero. $(x - 1 \neq 0)$

Logo, $x^3 - 3x + 2 = 0$ para satisfazer $y = 0$ e $x - 1 \neq 0$.

$(x - 1)^2 (x + 2) = 0$

Aqui, $x = 1$ ou $x = -2$

↳ aqui, a função não existe, pois $f(1) = \frac{0}{0}$.

Portanto temos o ponto $(-2, 0)$.

6) Não há assíntotas.

$f(x)$ pode ser escrita como $(x-1)(x+2) = x^2+x-2$, $x \neq 1$, ou seja, uma parábola, que cresce infinitamente e tem $x \in \mathbb{R}$ (com $x \neq 1$).

7) $f(x) = x^2+x-2$ → equivalente à função original

$f'(x) = 2x^1 + 1 - 0 = \underline{2x+1}$ //

* Pode derivar a função original pela regra do quociente também!

8) Pontos Críticos: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 2x+1 = 0 \rightarrow 2x = -1 \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = x^2+x-2$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = y \rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) - 2 = y \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = y \rightarrow y = \frac{1-2-8}{4} \rightarrow \boxed{y = -\frac{9}{4}}$$

Ponto crítico: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

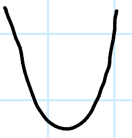
Como a função $f(x) = x^2+x-2$ (equivalente à função original) tem o coeficiente de x^2 positivo (1) e é uma função quadrática, sabemos que ela tem forma de parábola com concavidade voltada para cima, logo o ponto crítico é ponto de mínimo.

Outra forma de provar que é mínimo é pela segunda derivada:

$f'(x) = 2x+1$

$f''(x) = 2$

Como $f''(x) = 2 > 0$, a função é côncava para cima, logo o ponto é de mínimo.

9) Como sabemos que a função tem o formato: 
e temos $x = -\frac{1}{2}$ como x do ponto mínimo,

$f(x)$ é decrescente para $x < -\frac{1}{2}$

$f(x)$ é decrescente para $x > -\frac{1}{2}$

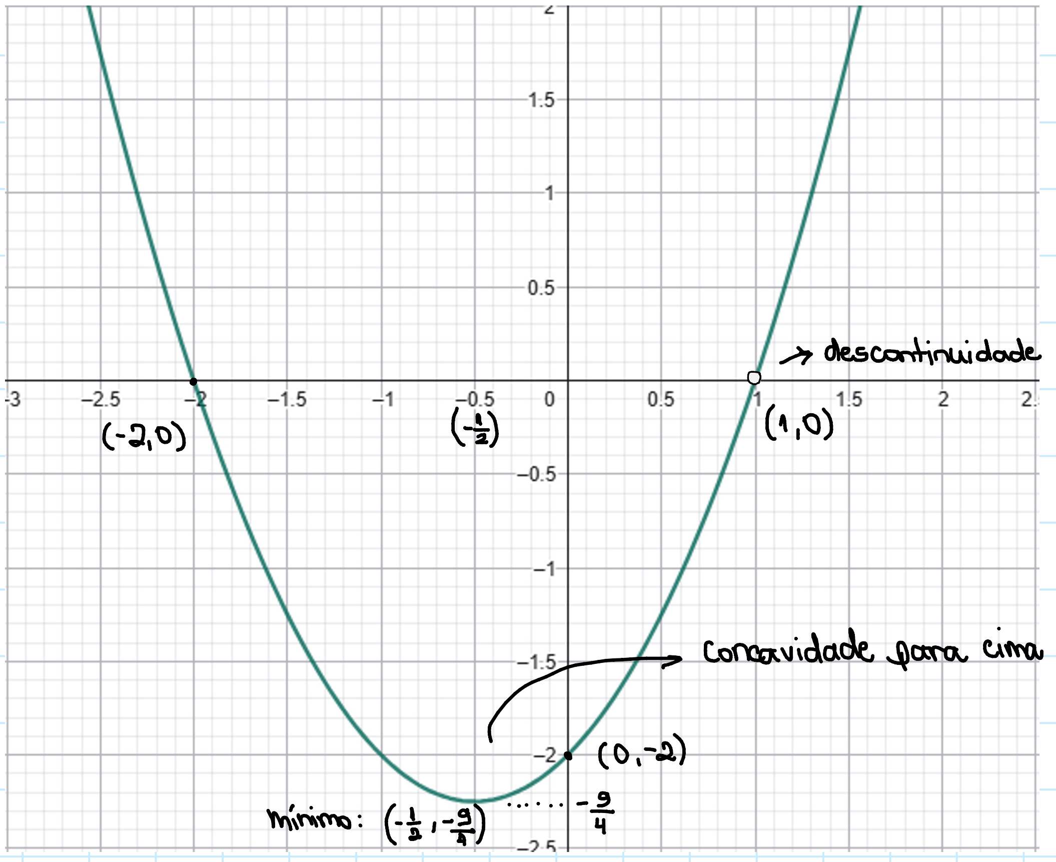
10) Concavidade para cima.

Não há ponto de inflexão (sempre côncava para cima).

11) Mínimo global: $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

Sem máximo global, pois quando $x \to \pm\infty$, $f(x) \to \infty$.

12)



RESUMO:

- Raiz da função: valor de x quando $y = 0$.
- Domínio: todos os possíveis valores de x.
- L'Hôpital: $\lim_{x \to a} \frac{h'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{h(x)}{g(x)}$.
- Pontos críticos: $P(x,y)$ tal que $f'(x) = 0$.
- Assíntotas: Retas nas quais a função se aproxima indefinidamente, mas nunca são tocadas.

Bons Estudos!