→ MÓDULO 2 → PRÉ-CÁLCULO

EMESTRE - 2025

① a) $f(x) = 2^x + 2$

i) 1. Troque f(x) por y: $y = 2^x + 2$
2. Troque x por y e y por x $x = 2^y + 2$
3. Isole y. $2^y = x - 2$

$\log_2 2^y = \log_2 (x-2)$ → aplicando $\log_2$ nos dois lados para isolar o y no expoente

$y = \log_2 (x-2)$ → fiquei só com y, pois $\log_b (b^y) = y$, então $\log_2 2^y = y$

$\boxed{f^{-1}(x) = \log_2 (x-2)}$! A INVERSA DE QUALQUER FUNÇÃO EXPONENCIAL É UMA FUNÇÃO LOGARÍTIMICA E VICE-VERSA (PARA BASE >0 E $\neq 1$)

ii) Dom(f): todos os possíveis valores que x assume em f(x)

$f(x) = 2^x + 2$, x não tem restrição, pode ser negativo, 0, positivo, decimal, etc.
somar 2 não influencia no domínio, logo $\boxed{\text{Dom}(f) = \mathbb{R}}$

Im(f) todos os valores de y em f(x)

A exponencial 2^x tem base $2 > 0$ e $\neq 1$, então só terá resultados >0, ou seja $(0, +\infty)$.

Novamente a soma de 2 não interfere na imagem, logo $\boxed{\text{Im}(f) = (0, +\infty)}$

Dom(f^{-1}):

$f^{-1}(x) = \log_2 (x-2)$, o logaritmando $(x-2)$ deve ser positivo $(x-2) > 0$, $x > 2$ (única restrição)

$\boxed{\text{Dom}(f^{-1}) = (2, +\infty)}$ ↳ $= (2, +\infty)$

Im(f^{-1})

$\log_2 (x-2)$, como qualquer log, pode ter valores em $-\infty$ e $+\infty$, logo $\boxed{\text{Im}(f^{-1}) = \mathbb{R}}$

iii) $f(x) = 2^x + 2$ → EXPONENCIAL

x	f(x)
-2	9/4
-1	5/2
0	3
1	4
2	6
3	10
4	18
...	

↳ DESLOCADA 2 UNIDADES PARA CIMA

↳ CRUZA O EIXO Y EM $y = 3$ (PARA CRUZAR O EIXO Y, $x = 0$)

$f^{-1}(x) = \log_2 (x-2)$ → LOGARÍTMICA

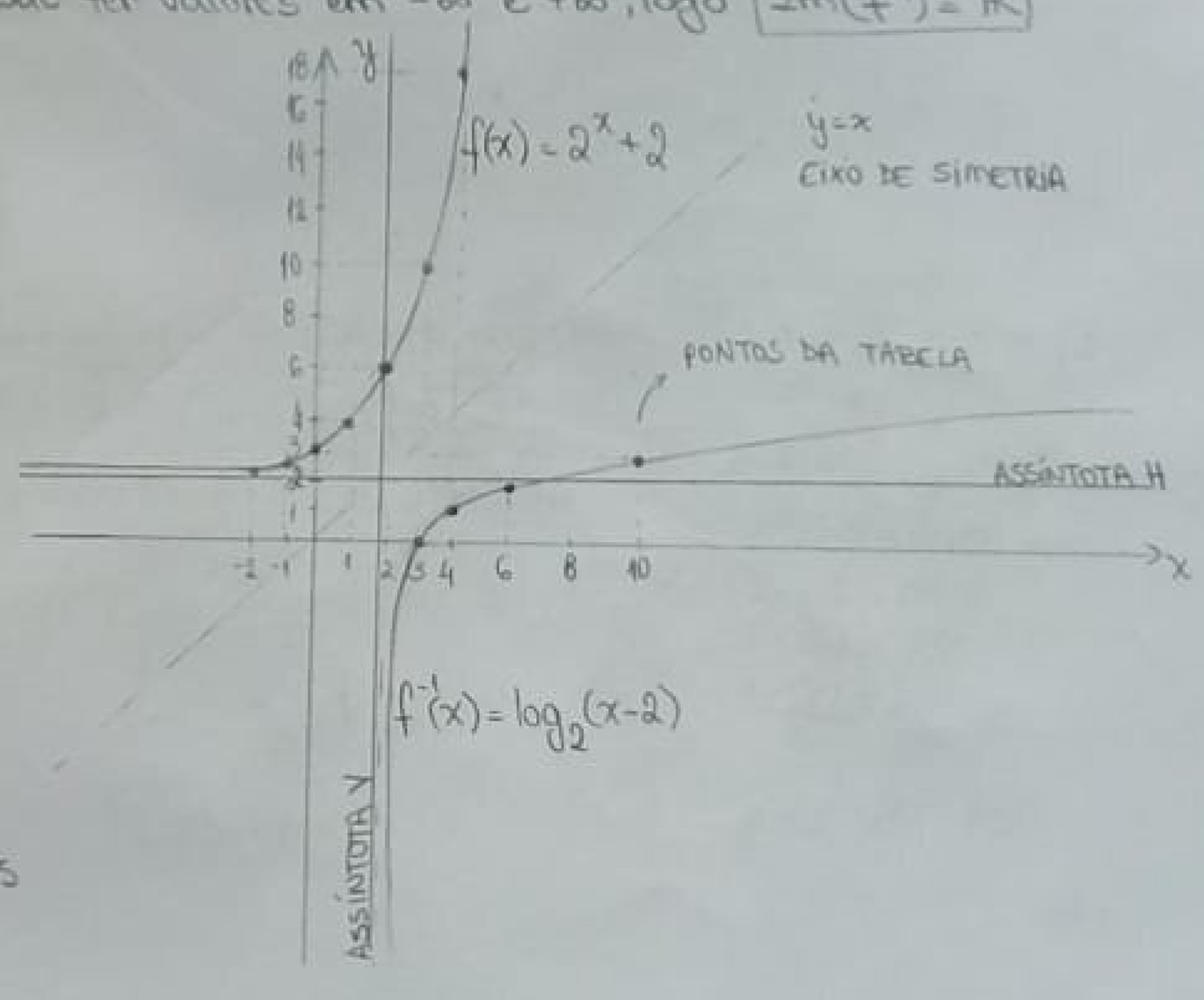
↳

(Dom(f^{-1}) = $(2, +\infty)$)

x	$f^{-1}(x)$
3	0
4	1
6	2
10	3
...	

↳ DESLOCADA 2 UNIDADES PARA A DIREITA
⊖ DIREITA
① ESQUERDA

↳ CRUZA O EIXO X EM $x = 3$ $(y = 0)$



iv) $y = 2$ ASSÍNTOTA HORIZONTAL DE $f(x)$ → $\boxed{x \to -\infty}$: aqui $f(x)$ se aproxima indefinidamente de $-\infty$

$x = 2$ ASSÍNTOTA VERTICAL DE $f^{-1}(x)$ → $\boxed{y \to -\infty}$ aqui $f^{-1}(x)$ se aproxima indefinidamente de $-\infty$

(COINCIDEM COM OS VALORES QUE DEFINEM OS DESLOCAMENTOS DAS FUNÇÕES)

→ ASSÍNTOTA HORIZONTAL EXISTE QUANDO $f(x)$ SE APROXIMA DE UM VALOR E $x \to \pm\infty$

→ ASSÍNTOTA VERTICAL EXISTE QUANDO X SE APROXIMA DE UM VALOR E $f(x) \to \pm\infty$

b) i) $f(x) = e^{3x} - 2$

$y = e^{3x} - 2$

$x = e^{3y} - 2$

$e^{3y} = x + 2$

$\ln(e^{3y}) = \ln(x+2)$

$3y = \ln(x+2)$

$y = \frac{\ln(x+2)}{3}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+2)}{3}}$

ii) $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$ (sem restrições para o expoente 3x em e)

$\boxed{Im(f) = (-2, +\infty)}$ → $e^{3x} > 0$, $e^{3x} - 2 > -2$, logo $Im = (-2, +\infty)$

$\boxed{Dom(f^{-1}) = (-2, +\infty)}$ → $x + 2 > 0$, $x > -2$, $(-2, +\infty)$

$\boxed{Im(f^{-1}) = \mathbb{R}}$ → log ou ln vai de $-\infty$ a $+\infty$

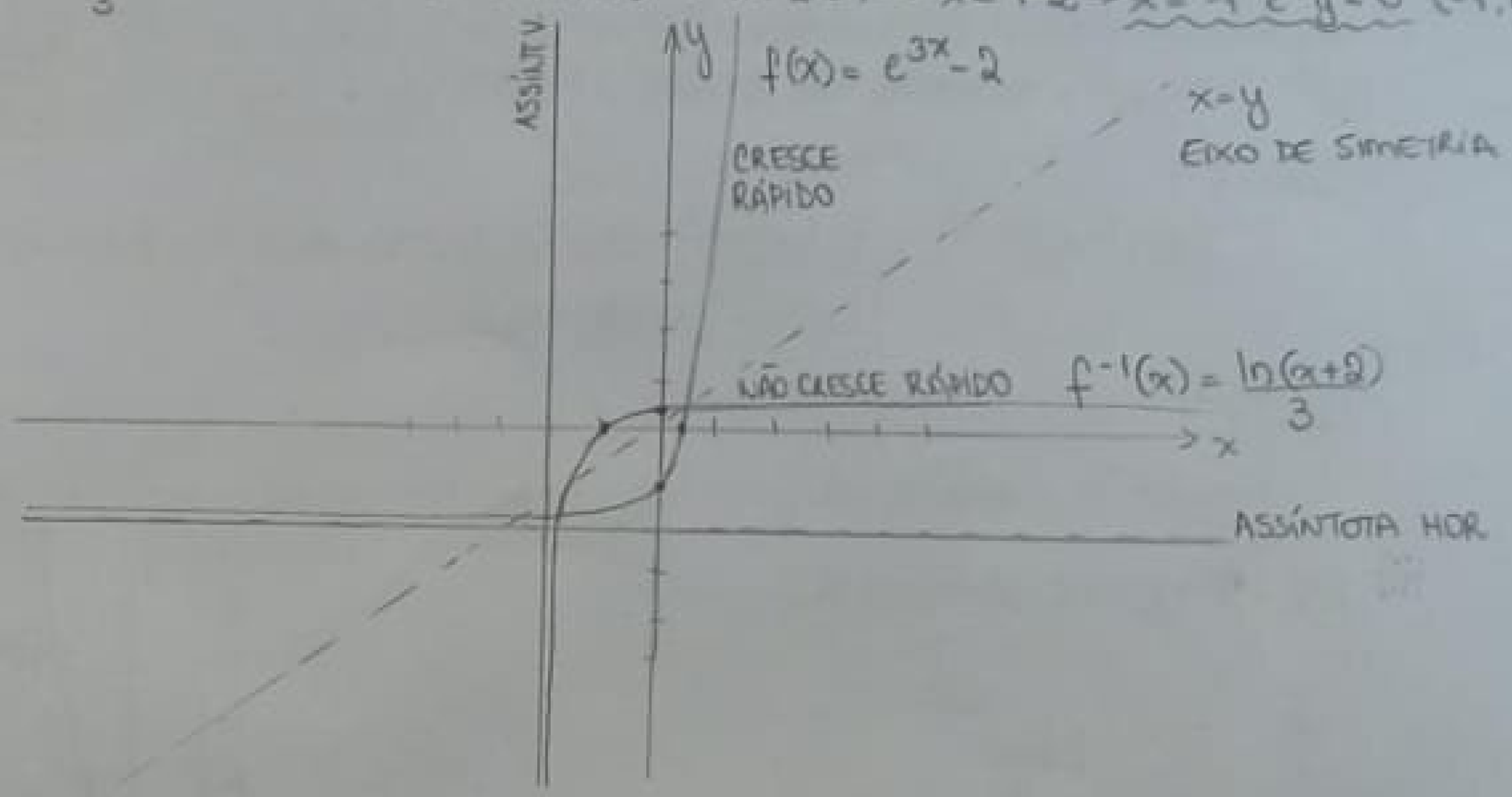
iii) $f(x) = e^{3x} - 2$ → 2 UNIDADES PARA BAIXO → ASSÍNTOTA HOR $y = -2$ (item iv)

$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+2)}{3}$ → 2 UNIDADES PARA A ESQUERDA → ASSÍNTOTA VER $x = -2$

↳ ACHATADA 3X

↳ DESCOBRINDO PONTOS

- $f(0) = e^{3 \cdot 0} - 2 = e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$, $x = 0$ e $y = -1$ $(0, -1)$
- $0 = e^{3x} - 2 \rightarrow e^{3x} - 2 \rightarrow \ln(e^{3x}) = \ln 2 \rightarrow 3x = \ln 2 \rightarrow x = \frac{\ln 2}{3} \rightarrow x \approx 0,2$ e $y = 0$ $(0,2; 0)$
- $f^{-1}(0) = \frac{\ln(0+2)}{3} = \frac{\ln 2}{3} \approx 0,2$, $x = 0$ e $y \approx 0,2$ $(0; 0,2)$
- $0 = \frac{\ln(x+2)}{3} \rightarrow \ln(x+2) = 0 \rightarrow \ln 1 = 0 \rightarrow x + 2 = 1 \rightarrow x = 1 - 2 \rightarrow x = -1$ e $y = 0$ $(-1, 0)$



c) i) $f(x) = e^{3x-2}$

$y = e^{3x-2}$

$x = e^{3y-2}$

$\ln(x) = \ln(e^{3y-2})$

$\ln(x) = 3y - 2$

$3y = \ln(x) + 2$

$y = \frac{\ln(x)+2}{3}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)+2}{3}}$

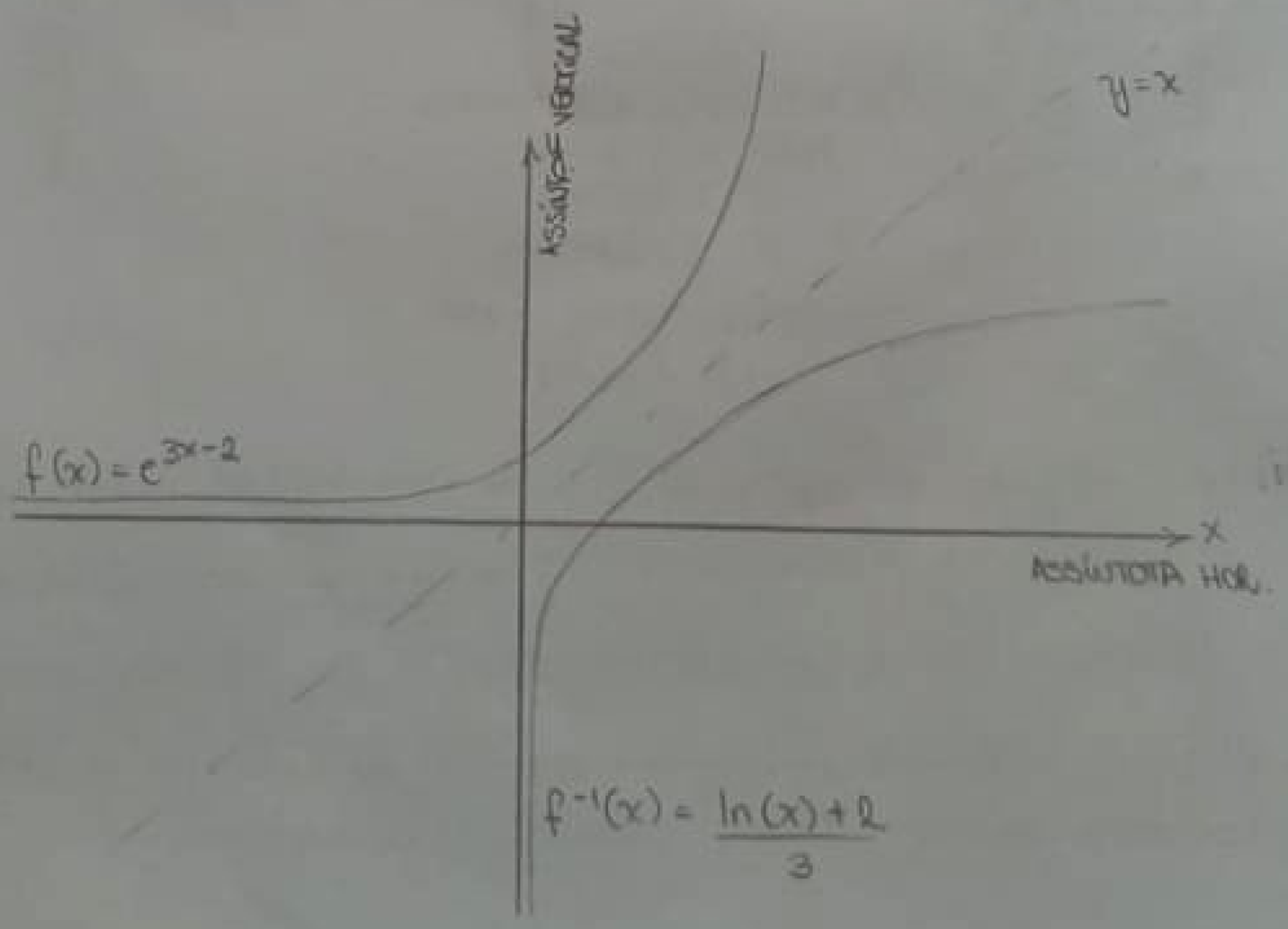
ii) $\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}}$ $\boxed{Im(f) = (0, +\infty)}$ → $e^{3x-2} > 0$

$\boxed{Dom(f^{-1}) = (0, +\infty)}$ → $x > 0$ $\boxed{Im(f^{-1}) = \mathbb{R}}$

iii) $f(x) = e^{3x-2}$ → "$f(x) = e^{3x-2} + 0$" NÃO É DESLOCADA EM NENHUMA UNIDADE, ASSÍNTOTA HORIZONTAL $y = 0$

$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x)+2}{3}$ → "$f^{-1}(x) = \frac{\ln(x+0)+2}{3}$" MESMO CASO, NÃO É DESLOCADA

ASSÍNTOTA VERTICAL $x = 0$



$f(x) = \log_3 |x|$, $x \neq 0$

a) i) $x \to 0^+$ → PELA DIREITA — $f(x) \to -\infty$

ii) $x \to 0^-$ → PELA ESQUERDA — $f(x) \to -\infty$

iii) $x \to +\infty$ — $f(x) \to +\infty$

iv) $x \to -\infty$ — $f(x) \to +\infty$

VERIFIQUE NO GRÁFICO DA LETRA d)

b) i) $f(x) > 0$

a base 3 é maior que 1, logo

$\log_3 |x| > 0$, $|x| > 1$

$x > 1$ ou $x < -1$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

ii) $f(x) = 0$

$\log_3 |x| = 0$

$|x| = 3^0$

$|x| = 1$

$x = -1$ ou $x = 1$

$x = \pm 1$

iii) $f(x) < 0$

$\log_3 |x| < 0$

$0 < |x| < 1$

$0 < x < 1$ ou $-1 < x < 0$

$x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

i), ii), iii) VÊM DAS PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS.

*PARA $b > 1$

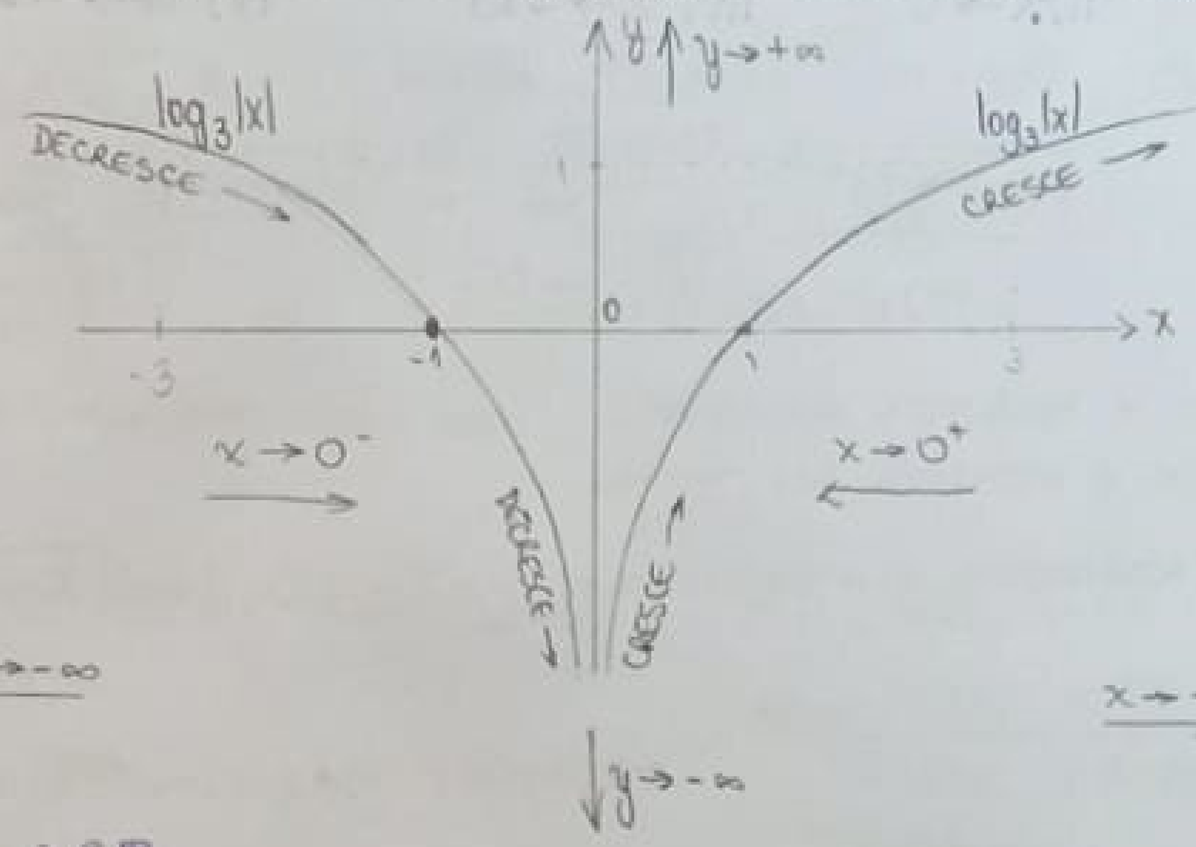
↳ $\log_b a > 0$ se $a > 1$

↳ $\log_b a = 0$ se $a = 1$

↳ $\log_b a < 0$ se $0 < a < 1$

c) $f(x)$ crescente se $x \in (0, +\infty)$ e decrescente se $x \in (-\infty, 0)$ → VEJA NA PRÓXIMA LEIRA

d)



$f(x) = 0$ com $x = \pm 1$, (b) ii))

logo

$x = -1$, $y = 0$ → $(-1, 0)$

$x = 1$, $y = 0$ → $(1, 0)$

③ $f(x) = \frac{3}{2^{|x|}} - 1$, $x \in \mathbb{R}$

a) FUNÇÃO PAR: $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = \frac{3}{2^{|-x|}} - 1 = \frac{3}{2^x} - 1 = \frac{3}{2^{|x|}} - 1 = f(x)$ → É PAR

* LEMBRANDO

FUNÇÃO ÍMPAR $f(-x) = -f(x)$

b) i) $x \to 0^+$

$|x| \to 0$

$f(x) = \frac{3}{2^0} - 1 = \frac{3}{1} - 1 = 2$

$f(x) \to 2^-$ → $f(x) = \frac{3}{2^{|x|}} - 1$ EQUIVALE A $f(x) = 3(2^{-|x|}) - 1$

* $f(x)$ vai tender, neste caso, a 2 pela esquerda

(OLHE VERTICALMENTE A SETA)

ii) $x \to +\infty$

$|x| \to +\infty$

$2^{|x|} \to \infty$

$\frac{3}{2^{|x|}} \to 0$

$f(x) = \frac{3}{2^{|x|}} - 1 \to 0 - 1 = -1$

$f(x) \to (-1)^+$

$f(x) = \frac{3}{2^{|x|}} - 1$ ASSÍNTOTA $Y = -1$

c) i) $f(x) > 0$

$\frac{3}{2^{|x|}} - 1 > 0$

$\frac{3}{2^{|x|}} > 1$

$3 > 2^{|x|}$

$\log_2(3) > \log_2 2^{|x|}$

$\log_2(3) > |x|$

$|x| < \log_2(3)$

$x < \log_2(3)$ e $x > -\log_2(3)$

$x \in (-\log_2(3), \log_2(3))$

ii) $f(x) = 0$

$\frac{3}{2^{|x|}} - 1 = 0$

$\frac{3}{2^{|x|}} = 1$

$3 = 2^{|x|}$

$\log_2(3) = \log_2 2^{|x|}$

$\log_2(3) = |x|$

$x = \pm \log_2(3)$

iii) $f(x) < 0$

INVERSO DO i)

$|x| > \log_2(3)$

$x > \log_2(3)$ ou $x < -\log_2(3)$

$x \in (-\infty, -\log_2(3)) \cup (\log_2(3), +\infty)$

d) $Im(f) = ?$

$2^{|x|} > 0$

$x \to +\infty$, $f(x) \to (-1)^+$

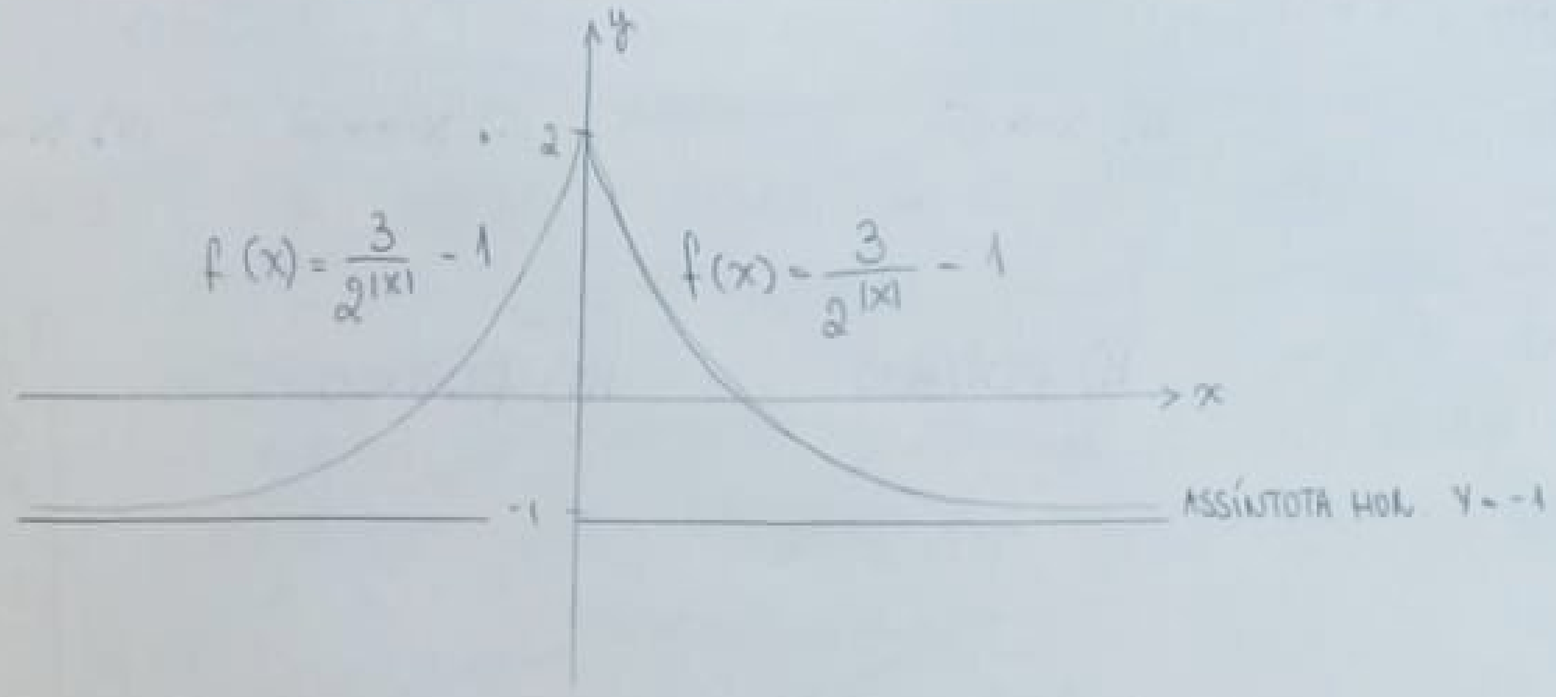
$x \to 0^+$, $f(x) \to 2^-$

$Im(f) = (-1, 2]$

↳ $f(0) = 2$ (mínimo)

↳ f nunca toca $y = -1$ para x

e)



④ $f(x) = \frac{20}{1+e^{x/4}}$, $x \in \mathbb{R}$

a) i) $x \to 0^+$

$f(0) = \frac{20}{1+e^{0/4}} = \frac{20}{1+e^0} = \frac{20}{1+1} = \frac{20}{2} = 10$

$f(x) \to 10^-$ → VER NO GRÁFICO AO FINAL ...

ii) $x \to 0^-$

$f(0) = 10$

$f(x) \to 10^+$

iii) $x \to +\infty$

$e^{+\infty/4} = e^{\infty} = \infty$

$f(x) = \frac{20}{1+\infty} = \frac{20}{\infty} = 0$

$f(x) \to 0^+$

iv) $x \to -\infty$

$e^{-\infty/4} = e^{-\infty} = 0$

$f(x) = \frac{20}{1+0} = \frac{20}{1} = 20$

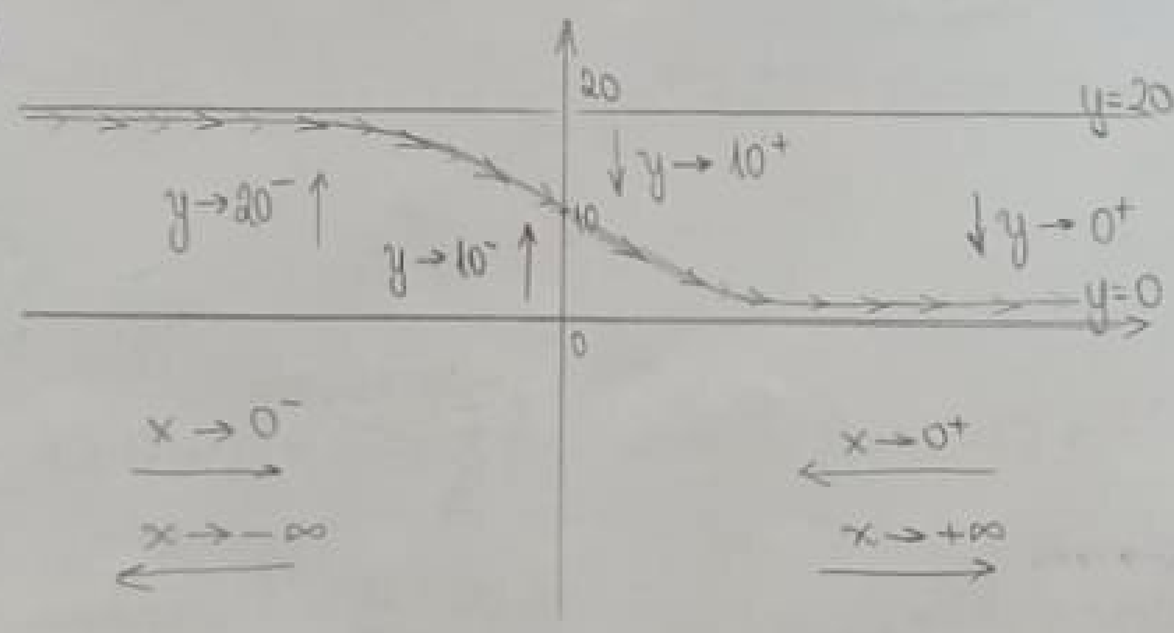
$f(x) \to 20^-$

b) $x \to +\infty$, $f(x) \to 0^+$ ⇒ $y = 0$ É ASSÍNTOTA HORIZONTAL

$x \to -\infty$, $f(x) \to 20^-$ ⇒ $y = 20$ É ASSÍNTOTA HORIZONTAL

c) A FUNÇÃO É LIMITADA PELAS 2 ASSÍNTOTAS, ELA EXISTE EM $y = (0,20)$, logo $\boxed{Im(f) = (0,20)}$

d)



A FUNÇÃO É DECRESCENTE: quando $x \to -\infty$, $f(x) \to 20$

e quando $x \to +\infty$, $f(x) \to 0$,

e a $Im(f) = (0,20)$

QUANTO MENOR O VALOR DE x, MAIOR O VALOR DE y

QUANTO MAIOR O VALOR DE x, MENOR O VALOR DE y

PROVA DO PROFESSOR

$x_1 < x_2$ → AQUI ELE ESCOLHE QUALQUER x_1 QUE SEJA MENOR QUE x_2

$\frac{x_1}{4} < \frac{x_2}{4}$

$e^{x_1/4} < e^{x_2/4}$

$1 + e^{x_1/4} < 1 + e^{x_2/4}$

$\frac{1}{1+e^{x_1/4}} > \frac{1}{1+e^{x_2/4}}$ → PENSE EM ALGUM VALOR, EX. $1 + e^{x_1/4} = 1$ E $1 + e^{x_2/4} = 2$

$1 < 2$ ✓

$\frac{1}{1} > \frac{1}{2}$ → $1 > \frac{1}{2}$ ✓

$\frac{20}{1+e^{x_1/4}} > \frac{20}{1+e^{x_2/4}}$

$f(x_1) > f(x_2)$ → $x_1 < x_2$ MAS $f(x_1) > f(x_2)$, ISSO PROVA QUE A FUNÇÃO DECRESCE

SE $x_1 < x_2$ E $f(x_1) < f(x_2)$, A FUNÇÃO SERIA CRESCENTE

200

= 0,05 (taxa de crescimento)

t = tempo (anos)

$P(t) = P_0 \cdot (1+r)^t$

a) $\boxed{P(t) = 200\,(1,05)^t}$

c) $P(10) = 200\,(1,05)^{10}$

$= 200 \quad ?$

$(1+x)^n \cong e^{nx}$

$(1,05)^n \cong e^{10 \cdot 0,05} \cong e^{0,5}$

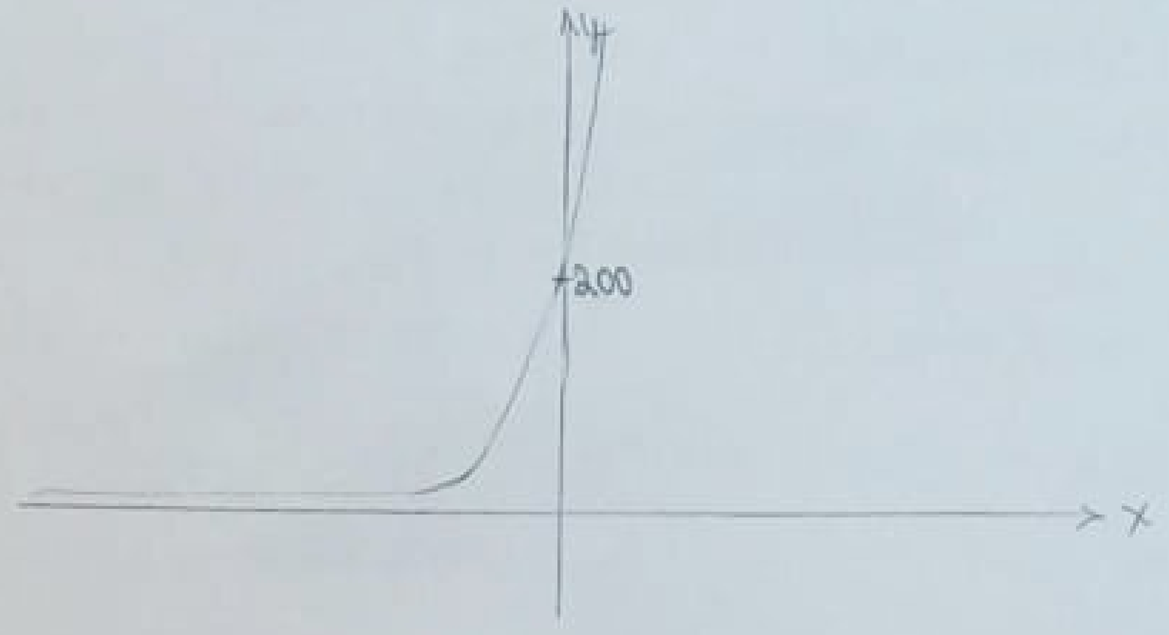
$e^{0,5} \cong \sqrt{e^1} \cong \sqrt{2,718} \cong 1,65$

$(1,05)^{10} \cong 1,65$

(OU DIRETO NA CALCULADORA)

$= 200 \quad 1,65 \quad \boxed{\cong 330 \text{ PESSOAS}}$

b) $P(0) = 200\,(1,05)^0 = 200 \cdot 1 = 200 \rightarrow (0,200)$



d) $P = 2P_0 = 2\,200 = 400$

$400 = 200\,(1,05)^t$

$\frac{400}{200} = (1,05)^t$

$(1,05)^t = 2$

$\ln(1,05)^t = \ln(2)$

$t \ln(1,05) = \ln(2)$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}$

$t \cong \frac{0,6931}{0,04879}$

$t \cong 14,21$

APROXIMADAMENTE 15 ANOS

⑥ $P(t) = 1000e^{-0,5t}$

↳ nº de trutas originais vivas após t anos

$P_0 = 1000$

a) $P(0,5) = 1000\,e^{-0,5 \cdot 0,5}$ (0,5 6 MESES = 0,5 ANOS)

$= 1000\,e^{-0,25}$

$\cong 1000 \quad 0,7788$

$\cong 778,8$

779 TRUTAS (APROX.) APÓS 6 MESES

$P(1) = 1000 \cdot e^{-0,5 \cdot 1}$

$= 1000 \quad e^{-0,5}$

$\cong 1000 \quad 0,6065$

$\cong 606,5$

607 TRUTAS (APROX) APÓS 1 ANO

b) $P(3) = 1000 \cdot e^{-0,5 \cdot 3}$

$= 1000 \cdot e^{-1,5}$

$\cong 1000 \cdot 0,2231$

$\cong 223,1$

223 TRUTAS (APROX.) APÓS 3 ANOS

APÓS 3 ANOS, DE 1000 TRUTAS ORIGINAIS, APENAS 223 PERMANECERAM VIVAS. O NÚMERO DE TRUTAS VIVAS VEM DECRESCENDO, COMO VIMOS NO ITEM ANTERIOR E NESSE, POIS ELE É DADO POR UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL DECRESCENTE, O QUE FAZ SENTIDO, POIS UMA PARTE MORRE E A PARTE VIVA RESTANTE DIMINUI, POR CONSEQUÊNCIA.

c) PARA $P(t) = 100$, $t = ?$

$100 = 1000\,e^{-0,5t}$

$\frac{100}{1000} = e^{-0,5t}$

$e^{-0,5t} = 0,1$

$\ln(e^{-0,5t}) = \ln(0,1)$

$-0,5t = -2,3026$

$t = \frac{-2,3026}{-0,5}$

$t = 4,6052$

APROX 4,6 ANOS