UFPR - Gabarito da Lista 2 - Cálculo 2 (CM312)

Joaquim Almeida - PET Estatística

14 April, 2026

Instruções

Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

---

1. $\lim_{(x,y)\to(1,2)}(5x^3 - x^2y^2)$

Resolução: Basta substituirmos os valores do limite e avaliar a função.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,2)}(5x^3 - x^2y^2) &= 5(1)^3 - (1)^2(2)^2 \\ &= 5 - 4 \\ &= 1\end{aligned}$$

---

2. $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y)$

Resolução: segue a mesma lógica do exercício anterior.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(1,-1)} e^{-xy}\cos(x+y) &= e^{-(1)(-1)}\cos(1+(-1)) \\ &= e^1 \cdot \cos(0) \\ &= e \cdot 1 \\ &= e\end{aligned}$$

---

3. $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2}$

Resolução: idem.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{4-xy}{x^2+3y^2} &= \frac{4-(2)(1)}{(2)^2+3(1)^2} \\ &= \frac{4-2}{4+3} \\ &= \frac{2}{7}\end{aligned}$$

---

4. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right)$

Resolução: idem

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,0)} \ln\left(\frac{1+y^2}{x^2+xy}\right) &= \ln\left(\frac{1+(0)^2}{(1)^2+(1)(0)}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1}{1}\right) \\
&= \ln(1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

---

5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-4y^4}{x^2+2y^2}$

Resolução: aqui se substituirmos os valores vamos ter uma indeterminação do tipo $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Logo, vamos fatorar para evitar a indeterminação:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2)^2-(2y^2)^2}{x^2+2y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-2y^2)(x^2+2y^2)}{x^2+2y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2-2y^2) \\
&= (0)^2 - 2(0)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

---

6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+\sin^2 y}{2x^2+y^2}$

Resolução: do jeito que está, vamos ter uma indeterminação do tipo $\mathbf{\frac{0}{0}}$

Para este exercício vamos parametrizar as curvas que passam por esse limite.

Logo vamos ter os seguinte valores do limite: $f(x,y) \implies \gamma(t) = (x(t), y(t))$

- **Caminho** $\gamma_1(t) = (t,0)$**:**

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2+\sin^2(0)}{2t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

- **Caminho** $\gamma_2(t) = (0,t)$**:**

$$\lim_{t\to 0} \frac{0^2+\sin^2 t}{2(0)^2+t^2} = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 1^2 = 1$$

Conclusão: Como os limites por caminhos diferentes resultaram em valores distintos ($\frac{1}{2} \neq 1$), o limite **não existe**.

---

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\cos y}{3x^2+y^2}$

Resolução: Utilizaremos novamente a técnica de caminhos parametrizados.

- **Caminho** $\gamma_1(t) = (t,0)$**:**

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(0)\cos 0}{3t^2 + 0^2} = \frac{0}{3t^2} = 0$$

- **Caminho** $\gamma_2(t) = (t, t)$ **(Reta** $y = x$**):**

$$\lim_{t\to 0} \frac{t \cdot t \cdot \cos t}{3t^2 + t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \cos t}{4t^2} = \frac{\cos(0)}{4} = \frac{1}{4}$$

Conclusão: Como os caminhos divergem ($0 \neq \frac{1}{4}$), o limite **não existe**.

---

8. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$

Resolução: Parametrizando os caminhos.

- **Caminho** $\gamma_1(t) = (t + 1, 0)$**:**

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t+1)0 - 0}{((t+1)-1)^2 + 0^2} = 0$$

- **Caminho** $\gamma_2(t) = (t + 1, t)$**:**

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t+1)t - t}{((t+1)-1)^2 + t^2} = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

Conclusão: Como os caminhos divergem ($0 \neq \frac{1}{2}$), o limite **não existe**.

---

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Resolução: aqui vamos resolver usando coordenadas polares.

Mudando os parametros:

- $x = r\cos\theta$
- $y = r\sin\theta$
- $\sqrt{x^2 + y^2} = r$
- Quando $(x, y) \to (0, 0)$, então $r \to 0$.

Substituindo:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} (r\cos\theta\sin\theta) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Conclusão: Como o limite convergiu para 0, o limite **existe**.

---

10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

Resolução: basta fatorarmos a fração para evitar a indeterminação.

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2\right)}{x^2+y^2} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2-y^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

Conclusão: o limite **existe** e é igual a 0.

---

11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2ye^y}{x^4+4y^2}$

Resolução: aqui vamos parametrizar as curvas.

- **Caminho $\gamma_1(t) = (t, 0)$:**

$$\gamma(t,0) = \frac{t^2 0 e^0}{t^4 + 4(0)^2} = 0$$

- **Caminho $\gamma_2(t) = (t, t^2)$:**

$$\gamma(t,t^2) = \frac{t^2t^2e^{t^2}}{t^4+4(t)^2} = \frac{t^4e^{t^2}}{5t^4} = \frac{e^{t^2}}{5} = \frac{e^0}{5} = \frac{1}{5}$$

Conclusão: Como os caminhos divergem $(0 \neq \frac{1}{5})$, o limite **não existe**.

---

12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$

Resolução: para determinar este limite, vamos usar o teorema do confronto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin^2 y \, \frac{x^2}{x^2+2y^2}$$

Conclusão: Como $\sin^2 y$ vai para 0 e a fração $\frac{x^2}{x^2+2y^2}$ é limitada $0 \leq \frac{x^2}{x^2+2y^2} \leq 1.$ então o limite **existe** e vai para 0.

---

13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Resolução: vamos fazer o conjugado do denominador para evitarmos a indeterminação.

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\,\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} \\
&= \frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}^2-1^2} \\
&= \frac{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{x^2+y^2} \\
&= \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \\
&= \sqrt{0^2+0^2+1}+1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Conclusão: o limite **existe** e é igual a 2.

---

14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$

Resolução: aqui vamos parametrizar as curvas.

- **Caminho** $\gamma_1(t) = (t,0)$**:**

$$\gamma(t,0) = \frac{t(0)^4}{t^2+0^8} = \frac{0}{t^2} = 0$$

- **Caminho** $\gamma_2(t) = (t^4,t)$**:**

$$\gamma(t^4,t) = \frac{t^4t^4}{\left(t^4\right)^2+t^8} = \frac{t^8}{2t^8} = \frac{1}{2}$$

---

15. $\lim_{(x,y,z)\to(\pi,\theta,1)} e^{y^2}\tan(xz)$

Resolução: aqui basta substituir os valores.

$$\lim_{(x,y,z)\to(\pi,\theta,1)} e^{y^2}\tan(xz) = e^{\theta^2}\tan(\pi\ 1) = e^{\theta^2}0 = 0$$

Conclusão: o limite **existe** e converge para 0.

---

16. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz}{x^2+y^2+z^2}$

Resolução: aqui vamos parametrizar as curvas.

- **Caminho** $\gamma_1(t) = (t,0,0)$**:**

$$\gamma(t,0,0) = \frac{t(0)+(0)(0)}{t^2+0^2+0^2} = \frac{0}{t^2} = 0$$

- **Caminho** $\gamma_2(t) = (t,t,t)$**:**

$$\gamma(t,t,t) = \frac{tt+tt}{t^2+t^2+t^2} = \frac{2t^2}{3t^2} = \frac{2}{3}$$

Conclusão: Como os caminhos divergem ($0 \neq \frac{2}{3}$), o limite **não existe**.

---

17. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$

Resolução: aqui vamos parametrizar as curvas.

- **Caminho** $\gamma_1(t) = (t,0,0)$**:**

$$\gamma(t,0,0) = \frac{t(0)+(0)(0)^2+(t)0^2}{t^2+0^2+0^4} = \frac{0}{t^2} = 0$$

- **Caminho** $\gamma_2(t) = (t,t,t)$**:**

$$\gamma(t,t,t) = \frac{tt+tt^2+tt^2}{t^2+t^2+t^4} = \frac{2t^3+t^2}{2t^2+t^4} = \frac{t^2\,(2t+1)}{t^2\,(t^2+2)} = \frac{2t+1}{t^2+2} = \frac{1}{2}$$

Conclusão: Como os caminhos divergem ($0 \neq \frac{1}{2}$), o limite **não existe**.

---

18. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{yz}{x^2+4y^2+9z^2}$

Resolução: aqui vamos parametrizar as curvas.

- **Caminho** $\gamma_1(t) = (t,0,0)$**:**

$$\gamma(t,0,0) = \frac{(0)(0)}{t^2+4(0)^2+9(0)^2} = \frac{0}{t^2} = 0$$

- **Caminho** $\gamma_2(t) = (t,t,t)$**:**

$$\gamma(t,t,t) = \frac{tt}{t^2+4(t)^2+9(t)^2} = \frac{t^2}{14t^2} = \frac{1}{14}$$

Conclusão: Como os caminhos divergem ($0 \neq \frac{1}{14}$), o limite **não existe**.