UFPR - Gabarito Cálculo 2 (CM312)

Joaquim Almeida - PET Estatística

2026-03-29

1. Distribuição Exponencial

Seja X uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

- **Parâmetros:** $\lambda > 0$
- **Suporte:** $x \in [0, \infty)$

1.1 Esperança(ou média da função): Primeiro, jogamos para "fora" da integral aquilo que é constante, nesse caso $\boldsymbol{\lambda}$. Computando isso abaixo, vamos ter a seguinte integral.

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{0}^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \lambda \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

Aqui, temos um caso clássico de integração por partes.

Nessa integral, vamos denotar $\boldsymbol{x = u}$ e $\boldsymbol{dv = e^{-\lambda e}}$

Derivando $\boldsymbol{u}$ e integrando $\boldsymbol{dv}$:

- $u = x \implies du = dx$
- $dv = e^{-\lambda e} \implies v = -\frac{e^{-\lambda e}}{\lambda}$

Com isso podemos montar a nova integral:

$$E[X] = \lambda \int_{0}^{\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(-x \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \int_{0}^{\infty} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right)$$

Como temos uma integral definida, e por partes, temos de calcular os limites de integração dos termos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$. com isso temos:

$$\begin{aligned} \left[-x \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{\infty} &= \left[\left(\infty \frac{e^{-\lambda \infty}}{\lambda} \right) - \left(0 \frac{e^{-\lambda 0}}{\lambda} \right) \right]_0^{\infty} \\ &= \left[\left(\infty \frac{\frac{1}{e^{-\lambda \infty}}}{\lambda} \right) - \left(0 \frac{e^{0}}{\lambda} \right) \right]_0^{\infty} \\ &= \left[\left(\infty \frac{0}{\lambda} \right) - \left(0 \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^{\infty} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como os limites de integração convergiram para $\mathbf{0}$, basta calcularmos e avaliarmos a ultima integral.

$$\begin{aligned} E[X] &= \lambda \left(0 - \int_0^\infty -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right) \\ &= \lambda \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \right) \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \end{aligned}$$

Note que esta integral é exatamente a mesma do caso, $\boldsymbol{v = -\frac{e^{-\lambda e}}{\lambda}}$ que resolvemos acima. Logo, basta fazer a substuição e avaliar os limites

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^\infty e^{u} \left(-\frac{du}{\lambda} \right) \\ &= -\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{u} du \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + C \end{aligned}$$

Avaliando os limites

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\lambda} \left[e^{-\lambda e} \right]_0^\infty &= -\frac{1}{\lambda} \left[\left(e^{-\lambda \infty} \right) - \left(e^{-\lambda 0} \right) \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[\left(\frac{1}{e^{\lambda \infty}} \right) - e^0 \right]_0^\infty \\ &= -\frac{1}{\lambda} \left[0 - 1 \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Com isso demonstramos que a esperança da distribuição exponencial é:

$$E[X] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}. \square$$

1.2 Variância(ou como gosto de chamar: Variânça <3): Para a variância, o processo é similar, a diferença é que ao inves de multiplicarmos a função por $\boldsymbol{x}$ iremos multiplicar por $\boldsymbol{x^2}$. Logo, a função vai ter o seguinte formato:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - (E[X])^2 \\ &= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}\, dx - (E[X])^2 \\ &= \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\, dx - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Como na esperança, chegamos novamente em uma integral que vai ser resolvida por partes. Mas note que não teremos muito trabalho, pois já temos o resultado de uma das parte da integral, sendo ela $\boldsymbol{dv = e^{-\lambda x}}$.

Definindo $\boldsymbol{x = u}$ e $\boldsymbol{dv = e^{-\lambda x}}$, temos:

- $u = x^2 \implies du = 2xdx$
- $dv = e^{-\lambda x} \implies v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$

Montando a integral com a informações acima:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx - (E[X])^2 \\ &= \lambda \left(-x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \int_0^\infty -2x \, \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right) - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Novamente, como na esperança vamos ter de avaliar os limites de integração dos termos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

Logo:

$$\begin{aligned} \left[-x^2 \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^\infty &= \left[\left(-\infty^2 \frac{e^{-\lambda \infty}}{\lambda} \right) - \left(-0 \frac{e^{-\lambda 0}}{\lambda} \right) \right]_0^\infty \\ &= \left[\left(-\infty^2 \frac{\frac{1}{e^{-\lambda \infty}}}{\lambda} \right) - \left(-0 \frac{e^0}{\lambda} \right) \right]_0^\infty \\ &= \left[\left(-\infty^2 \frac{0}{\lambda} \right) - \left(-0 \frac{1}{\lambda} \right) \right]_0^\infty \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como obtivemos **0** novamente, vamos ter a seguinte integral:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \lambda \left(- \int_0^\infty -2x \, \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} dx \right) - (E[X])^2 \\ &= \lambda \left(\frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x \, e^{-\lambda x} dx \right) - (E[X])^2 \\ &= 2 \int_0^\infty x \, e^{-\lambda x} dx - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Note que $\boldsymbol{2 \int_0^\infty x \, e^{-\lambda x} dx}$ é exatamente a mesma integral que solucionamos por partes na esperança. Com isso, podemos ganhar tempo e apenas substituir esse resultado que obtivemos na demonstração da esperança

Fazendo isso, temos a seguinte integral:

$$\begin{aligned} Var(X) &= 2 \int_0^\infty x \, e^{-\lambda x} dx - (E[X])^2 \\ &= 2 \left(-x \, \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - \int_0^\infty - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \, dx \right) - (E[X])^2 \\ &= 2 \left(0 - \int_0^\infty - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \, dx \right) - (E[X])^2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, dx \right) - (E[X])^2 \end{aligned}$$

E novamente chegamos em mais uma integral que já resolvemos sendo essa: $\boldsymbol{\int_0^\infty e^{-\lambda x} \, dx}$

Integrando:

$$\begin{aligned} Var(X) &= 2 \left(\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \, dx \right) - (E[X])^2 \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty e^u \, \left(- \frac{du}{\lambda} \right) - (E[X])^2 \\ &= - \frac{2}{\lambda^2} \int_0^\infty e^u \, du - (E[X])^2 \\ &= - \frac{2}{\lambda^2} \left(e^{-\lambda x} + C \right) - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Avaliando os limites temos:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= -\frac{2}{\lambda^2}\left[\left(e^{-\lambda\infty}\right)-\left(e^{-\lambda 0}\right)\right]_0^{\infty}-(E[X])^2 \\
&= -\frac{2}{\lambda^2}\left[-1\right]-(E[X])^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2}-(E[X])^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

Com isso demonstramos que a variância da distribuição exponencial é:

$$Var(X) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} \square$$

OBS: Para as seguintes funções: Gama Generalizada e Weibull, vamos manipulalas até encontrarmos a função $\Gamma(z)$. Sendo ela: $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1}\, e^{x}\, dt$

2. Distribuição Gama Generalizada

Seja X uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} x^{d-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]$$

- **Parâmetros:** $a > 0$, $d > 0$ e $p > 0$
- **Suporte:** $x \in [0, \infty)$

2.1 Esperança da Gama Generalizada: A primeira vista, esta função parece muito complicada de manipular. No entanto, muitas partes dela podem ser "jogadas" para fora da integral. Deixando-a muito mais "limpa" para sabermos onde devemos trabalhar.

Dito isso, vamos ter a seguinte formula:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= \int_0^{\infty} x\, \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} x^{d-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx \\
&= \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} x\, x^{d-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx \\
&= \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} x^{d} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx
\end{aligned}
$$

Portanto esta é a função que iremos integrar.

Esta integral a primeira vista, tem cara de ser resolvida por partes. No entando é mais fácil/simples de calcularmos por substuição.

Seja a substituição $\boldsymbol{u = \left(\frac{x}{a}\right)^p}$ e resolvendo para $\boldsymbol{x}$, temos:

- $u = \left(\frac{x}{a}\right)^p \implies u^{\frac{1}{p}} = \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \implies u^{\frac{1}{p}} = \frac{x}{a} \implies x = au^{\frac{1}{p}}$

Agora derivando em função de $\boldsymbol{u}$:

- $x = au^{\frac{1}{p}} \implies dx = \frac{1}{p} a u^{\frac{1}{p}-1}\, du$

Montando a integral:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^{\infty} x^d \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx \\
&= \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} u^d e^{-u} \left(\frac{1}{p} a u^{\frac{1}{p}-1}\right) du \\
&= \frac{a}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} \left(a u^{\frac{1}{p}}\right)^d e^{-u}\, u^{\frac{1}{p}-1}\, du \\
&= \frac{a}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} a^d u^{\frac{d}{p}} e^{-u}\, u^{\frac{1}{p}-1}\, du \\
&= \frac{a}{\Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} u^{\frac{d}{p}} e^{-u}\, u^{\frac{1}{p}-1}\, du \\
&= \frac{a}{\Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} u^{\frac{d+1}{p}-1} e^{-u}\, du
\end{aligned}$$

Note como a função ficou parecida com a função $\boldsymbol{\Gamma(z)}$

Com isso. basta usar $\frac{d+1}{p}$ como parâmetro na função.

Logo:

$$\begin{aligned}
E[X] &= \frac{a}{\Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} u^{\frac{d+1}{p}-1} e^{-u}\, du \\
&= \frac{a}{\Gamma(\frac{d}{p})} \Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right) \\
&= a \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma(\frac{d}{p})}
\end{aligned}$$

Com isso demonstramos que:

$$E[X] = \int_0^{\infty} \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} x^{d-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx = a \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma(\frac{d}{p})} \square$$

2.2 Variância da Gama Generalizada: Aqui vamos usar a mesma lógica da esperança.

Logo:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - (E[X])^2 \\
&= \int_0^{\infty} x^2 \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} x^{d-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx - (E[X])^2 \\
&= \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} x^2 x^{d-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx - (E[X])^2 \\
&= \frac{p}{a^d \Gamma(\frac{d}{p})} \int_0^{\infty} x^{d+1} \exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\, dx - (E[X])^2
\end{aligned}$$

A partir daqui vai ser bem similar a esperança.

Seja a substituição $\boldsymbol{u = (\frac{x}{a})^p}$ e resolvendo para $\boldsymbol{x}$, temos:

- $u = \left(\frac{x}{a}\right)^p \implies u^{\frac{1}{p}} = \left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^p \implies u^{\frac{1}{p}} = \frac{x}{a} \implies x = au^{\frac{1}{p}}$

Agora derivando em função de $\boldsymbol{u}$:

- $x = au^{\frac{1}{p}} \implies dx = \frac{1}{p}au^{\frac{1}{p}-1}\,du$

Montando a integral:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{p}{a^d\Gamma(\frac{d}{p})}\int_0^\infty x^{d+1}\exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\,dx - (E[X])^2\\
&= \frac{p}{a^d\Gamma(\frac{d}{p})}\int_0^\infty u^{d+1}e^{-u}\left(\frac{1}{p}au^{\frac{1}{p}-1}\right)\,du - (E[X])^2\\
&= \frac{a}{a^d\Gamma(\frac{d}{p})}\int_0^\infty \left(au^{\frac{1}{p}}\right)^{d+1}e^{-u}\,u^{\frac{1}{p}-1}\,du - (E[X])^2\\
&= \frac{a}{a^d\Gamma(\frac{d}{p})}\int_0^\infty a^{\frac{d+1}{p}}u^{\frac{d+1}{p}}e^{-u}\,u^{\frac{1}{p}-1}\,du - (E[X])^2\\
&= \frac{a}{\Gamma(\frac{d}{p})}\int_0^\infty au^{\frac{d+1}{p}}e^{-u}\,u^{\frac{1}{p}-1}\,du - (E[X])^2\\
&= \frac{a^2}{\Gamma(\frac{d}{p})}\int_0^\infty u^{\frac{d+2}{p}-1}e^{-u}\,du - (E[X])^2
\end{aligned}$$

Novamente caímos em uma integral que é similar a função $\boldsymbol{\Gamma(z)}$

Portanto:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \frac{a^2}{\Gamma(\frac{d}{p})}\int_0^\infty u^{\frac{d+2}{p}-1}e^{-u}\,du - (E[X])^2\\
&= \frac{a^2}{\Gamma(\frac{d}{p})}\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right) - (E[X])^2\\
&= a^2\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma(\frac{d}{p})} - (E[X])^2\\
&= a^2\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma(\frac{d}{p})} - \left(a\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma(\frac{d}{p})}\right)^2\\
&= a^2\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma(\frac{d}{p})} - a^2\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)^2}{\Gamma(\frac{d}{p})^2}
\end{aligned}$$

Com isso provamos que variância da função Gama Generalizada é:

$$Var(X) = \int_0^\infty \frac{p}{a^d\Gamma(\frac{d}{p})}x^{d-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{a}\right)^p\right]\,dx = a^2\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)}{\Gamma(\frac{d}{p})} - a^2\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{p}\right)^2}{\Gamma(\frac{d}{p})^2}\,\square$$

3. Distribuição Weibull

Seja X uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right]$$

- **Parâmetros:** $\lambda > 0$ e $k > 0$
- **Suporte:** $x \in [0, \infty)$

3.1 Esperança da Weibull: Aqui também não tem segredo, o processo vai ser igual a Gama Generalizada. Jogamos para fora o que é constante e manipulamos a integral até chegar numa função $\boldsymbol{\Gamma(z)}$.

Dito isso, vamos ter a seguinte integral:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} x\, \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}\right] dx \\
&= \frac{k}{\lambda} \int_{0}^{\infty} x \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}\right] dx
\end{aligned}
$$

Esta integral também vai ser resolvida por substituição.

Portando, vamos substituir $\left(\boldsymbol{\frac{x}{\lambda}}\right)^{\boldsymbol{k}}$ resolver em relação a $\boldsymbol{x}$:

- $u = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k} \implies u^{\frac{1}{k}} = \left[\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^{k} \implies u^{\frac{1}{k}} = \frac{x}{\lambda} \implies x = \lambda u^{\frac{1}{k}}$

Agora derivamos em relação a $\boldsymbol{u}$:

- $x = \lambda u^{\frac{1}{k}} \implies dx = \frac{1}{k} \lambda u^{\frac{1}{k}-1}\, du$

Note que esse passo foi igual a da esperança da Gama Generalizada. A única mudança foi que apenas trocamos $\boldsymbol{a}$ por $\boldsymbol{\lambda}$ e $\boldsymbol{p}$ por $\boldsymbol{k}$

Montando a integral:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \frac{k}{\lambda} \int_{0}^{\infty} x \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-u} \frac{1}{k} \lambda u^{\frac{1-k}{k}}\, dx \\
&= \frac{k}{\lambda} \int_{0}^{\infty} \lambda u^{\frac{1}{k}} \left(u^{\frac{1}{k}}\right)^{k-1} e^{-u} \frac{1}{k} \lambda u^{\frac{1-k}{k}}\, dx \\
&= \lambda \int_{0}^{\infty} u^{\frac{2-k}{k}}\, u^{\frac{k-1}{k}} e^{-u}\, dx \\
&= \lambda \int_{0}^{\infty} u^{\frac{2-k}{k}}\, u^{\frac{k-1}{k}} e^{-u}\, dx \\
&= \lambda \int_{0}^{\infty} u^{\frac{1}{k}}\, e^{-u}\, dx
\end{aligned}
$$

Novamente chegamos a uma integral parecida com a $\boldsymbol{\Gamma(z)}$, porêm, $\boldsymbol{\frac{1}{k}}$ não se encaixa bem na função. Logo uma simples equação resolve isso:

- $z - 1 = \frac{1}{k} \implies z = 1 + \frac{1}{k}$

Com isso temos a seguinte resultado:

$$
E[X] = \lambda\, \Gamma\!\left(1 + \frac{1}{k}\right)
$$

Portanto, a esperança da função Weibull é:

$$
E[X] = \int_{0}^{\infty} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k}\right] dx = \lambda\, \Gamma\!\left(1 + \frac{1}{k}\right) \square
$$

3.2 Variância da Weibull: Novamente o processo vai ser bem similiar.

Logo vamos ter a seguinte integral:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 \; \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] \, dx \\ &= \frac{k}{\lambda} \int_0^{\infty} x^2 \; \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] \, dx \end{aligned}$$

As substituições aqui são exatamente as mesmas da esperança que calculamos a pouco. Logo podemos montar diretamente a integral:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{k}{\lambda} \int_0^{\infty} x^2 \; \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] \, dx - (E[X])^2 \\ &= \frac{k}{\lambda} \int_0^{\infty} \left(\lambda u^{\frac{1}{k}}\right)^2 \left(u^{\frac{1}{k}}\right)^{k-1} e^{-u} \frac{1}{k} \lambda u^{\frac{1-k}{k}} \, du - (E[X])^2 \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} u^{\frac{2}{k}} u^{\frac{k-1}{k}} u^{\frac{1-k}{k}} e^{-u} du - (E[X])^2 \\ &= \lambda^2 \int_0^{\infty} u^{\frac{2}{k}} e^{-u} du - (E[X])^2 \end{aligned}$$

Novamente chegamos na $\boldsymbol{\Gamma(z)}$. Mas o parâmetro não está igual a $\boldsymbol{z - 1}$. Logo basta equacionarmos e resolvermos para $\boldsymbol{z}$.

- $z - 1 = \frac{2}{k} \implies z = 1 + \frac{2}{k}$

Com isso temos a seguinte resultado:

$$\begin{aligned} Var(X) &= \lambda^2 \; \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - (E[X])^2 \\ &= \lambda^2 \; \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \lambda^2 \; \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \end{aligned}$$

Portando demonstramos que a variância da Weibull é:

$$Var(X) = \int_0^{\infty} x \, \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right] \, dx = \; \lambda^2 \; \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \lambda^2 \; \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \square$$

4. Distribuição Log-normal

Seja X uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- **Parâmetros:** $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$
- **Suporte:** $x \in (0, \infty)$

5. Distribuição de Laplace

Seja X uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)$$

- **Parâmetros:** $\mu \in \mathbb{R}$ e $b > 0$
- **Suporte:** $x \in (-\infty, \infty)$
- **Tarefa:** Calcule $E[X]$ e $Var(X)$

5.1. Integrais Modulares: Antes de fazermos a Esperança e Variância da Laplace, gostaria de mostrar como podemos resolver uma integral com módulo.

Seja:

$$\int_{-1}^{1} e^{|x|} dx$$

.

E sabendo que o módulo é

- $x \geq 0 : e^{|x|} = e^{x}$
- $x < 0 : e^{|x|} = e^{-x}$

Vamos ter de dividir a integral por casos. Sendo eles positivos e negativos para então somar seus resultados. E como temos apenas o $\boldsymbol{x}$ dentro do módulo, então **0** sera o ponto de quebra da função. Assim como também vai ser um limite de integração.

Com essas infos acima vamos ter a seguinte integral:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} e^{-x} dx + \int_{0}^{1} e^{x} dx &= \left[-e^{-0} - (-e^{-(-1)})\right]_{-1}^{0} + \left[e^{1} - (e^{0})\right]_{0}^{1} \\ &= (-1+e) + (e-1) \\ &= 2e - 2 \ \square\end{aligned}$$

Com isso, temos um exemplo para usar na Laplace. E vai ser exatamente a mesma lógica para os calculos.

OBS: Essa é a distribuição mais trabalhosa da lista, de longe.

5.2 Esperança da distribuição de Laplace:

$$\begin{aligned}E[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) dx \\ &= \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) dx\end{aligned}$$

Aplicando os módulo:

- $\exp\left(-\frac{-|x-\mu|}{b}\right) \implies \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)$
- $\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) \implies \exp\left(-\frac{x-\mu}{b}\right)$

Note que $\boldsymbol{\mu}$ vai ser o ponto de quebra da função.

Logo, montando a integral vamos ter:

$$E[X] = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\mu} x\exp\left(\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx \ + \ \frac{1}{2b}\int_{\mu}^{\infty} x\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx$$

Vamos denotar como:

- A: $\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\mu} x\exp\left(\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx$
- B: $\frac{1}{2b}\int_{\mu}^{\infty} x\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx$

Avaliando o item **A** por partes, vamos denotar $\boldsymbol{u = x}$ e $\boldsymbol{dv = \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}$

Derivando $\boldsymbol{u}$ e integrando $\boldsymbol{dv}$:

- $u = x \implies du = dx$
- $dv = \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right) \implies v = b\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)$

Com isso podemos montar a nova integral:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\mu} x\exp\left(\frac{|x-\mu|}{b}\right)\ dx \\ &= \frac{1}{2b}\left(xb\exp\left[\frac{x-\mu}{b}\right] + b\int_{-\infty}^{\mu}\exp\left[\frac{x-\mu}{b}dx\right]\right) \end{aligned}$$

Assim como na exponencial, vamos avaliar os limites de integração dos termos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$.

Então:

$$\begin{aligned} \left[xb\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)\right]_{-\infty}^{\mu} &= \left[\mu b\exp\left(\frac{\mu-\mu}{b}\right)\right] - \left[-\infty b\exp\left(\frac{-\infty-\mu}{b}\right)\right] \\ &= \left[\mu b e^{0}\right] - 0 \\ &= \mu b \end{aligned}$$

Voltando a integral de antes com esse resultado:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2b}\left(xb\exp\left[\frac{x-\mu}{b}\right] + b\int_{-\infty}^{\mu}\exp\left[\frac{x-\mu}{b}dx\right]\right) \\ &= \frac{1}{2b}\left(\mu b + b\int_{-\infty}^{\mu}\exp\left[\frac{x-\mu}{b}dx\right]\right) \end{aligned}$$

Note que a integral resultante de dentro já foi resolvida anteriormente. Sendo o caso:

- $dv = \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right) \implies v = b\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)$

Com isso basta nos substituirmos e avaliarmos seu seus limites de integração.

Logo:

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2b}\left(\mu b + b\int_{-\infty}^{\mu} \exp\left[\frac{x-\mu}{b}dx\right]\right)\\
&= \frac{1}{2b}\left(\mu b + b\left(b\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{2b}\left(\mu b + b\left[\left[b\exp\left(\frac{\mu-\mu}{b}\right)\right] - \left[b\exp\left(\frac{-\infty-\mu}{b}\right)\right]\right]_{-\infty}^{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{2b}\left(\mu b + b\left[be^0 - 0\right]_{-\infty}^{\mu}\right)\\
&= \frac{1}{2b}\left(\mu b + b\left(b\right)\right)\\
&= \frac{1}{2b}\left(\mu b + b^2\right)\\
&= \frac{\mu}{b} + \frac{b}{2}
\end{aligned}
$$

Para o item **B** também poderíamos calcular a integral. Mas como temos uma função modular e que por isso é simétrica em relação a $\boldsymbol{\mu}$. Vamor ter o seguinte resultado:

$$
B = \frac{\mu}{b} - \frac{b}{2}
$$

Somando os resultados:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= A + B\\
&= \frac{\mu}{b} + \frac{b}{2} + \frac{\mu}{b} - \frac{b}{2}\\
&= \mu
\end{aligned}
$$

Com isso demonstramos que a esperança da distribuição de Laplace é:

$$
E[X] = \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) = \mu \ \square
$$

5.3 Variância da distribuição de Laplace A mesma lógica do módulo vai se aplicar aqui novamente.

Montando a integral vamos ter:

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \left(E[X]\right)^2\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{2b}\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx - \left(E[X]\right)^2\\
&= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx - \left(E[X]\right)^2
\end{aligned}
$$

Separando por casos:

$$
E[X] = \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\mu} x^2\exp\left(\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx \ + \ \frac{1}{2b}\int_{\mu}^{\infty} x^2\exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx - \left(E[X]\right)^2
$$

- A: $\frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\mu} x^2\exp\left(\frac{|x-\mu|}{b}\right)dx$

- B: $\frac{1}{2b}\int_{\mu}^{\infty} x^2 \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) dx$

Avaliando o item **A** por partes, vamos denotar $\boldsymbol{u = x^2}$ e $\boldsymbol{dv = \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)}$

Derivando $\boldsymbol{u}$ e integrando $\boldsymbol{dv}$:

- $u = x^2 \implies du = 2xdx$
- $dv = \exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right) \implies v = b\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)$

Montando a integral com as infos acima:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2b}\int_{-\infty}^{\mu} x^2 b\exp\left(\frac{|x-\mu|}{b}\right)\ dx \\ &= \frac{1}{2b}\left(x^2 b\exp\left[\frac{x-\mu}{b}\right] + \int_{-\infty}^{\mu} 2xb\exp\left[\frac{x-\mu}{b}\right] dx\right) \end{aligned}$$

Avaliando os limites dos termos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{aligned} \left[x^2 b\exp\left(\frac{x-\mu}{b}\right)\right]_{-\infty}^{\mu} &= \left[\mu^2 b\exp\left(\frac{\mu-\mu}{b}\right)\right] - \left[-\infty^2 b\exp\left(\frac{-\infty-\mu}{b}\right)\right] \\ &= \left[\mu^2 b e^0\right] - 0 \\ &= \mu^2 b \end{aligned}$$

Montando a integral com o resultado:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2b}\left(x^2 b + \int_{-\infty}^{\mu} 2xb\exp\left[\frac{x-\mu}{b}\right] dx\right) \\ &= \frac{1}{2b}\left(x^2 b + 2b\int_{-\infty}^{\mu} x\exp\left[\frac{x-\mu}{b}\right] dx\right) \end{aligned}$$

Note que novamente chegamos em um caso em que já resolvemos anteriormente. Só que aqui, vai a ser o item A da esperança.

Com isso montamos a integral com resultado anterior.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2b}\left(\mu^2 b + 2b\int_{-\infty}^{\mu} x\exp\left[\frac{x-\mu}{b}dx\right]\right) \\ &= \frac{1}{2b}\left(\mu^2 b + 2b\left(ub + b\int_{-\infty}^{\mu} \exp\left[\frac{x-\mu}{b}dx\right]\right)\right) \\ &= \frac{1}{2b}\left(\mu^2 b + 2b\left(ub + b\left(b\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{2b}\left(\mu^2 b + 2b\left(ub + b^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{2b}\left(bu^2 + 2b^2 u + 2b^3\right) \\ &= \frac{bu^2}{2b} + \frac{2b^2 u}{2b} + \frac{2b^3}{2b} \\ &= \frac{u^2}{2} + bu + b^2 \end{aligned}$$

Conhecendo a simetria da função modular temos para B:

$$B = \frac{u^2}{2} - bu + b^2$$

Logo:

$$\begin{aligned}
Var(x) &= A + B - (E[X])^2 \\
&= \frac{u^2}{2} + bu + b^2 \ + \ \frac{u^2}{2} - bu + b^2 - (E[X])^2 \\
&= 2b^2 - (E[X])^2 \\
&= 2b^2 - u^2
\end{aligned}$$

Portanto, demonstramos que a variância da Laplace é:

$$Var(x) = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{b}\right) = 2b^2 - u^2 \square$$

6. Distribuição Normal

Seja X uma variável aleatória com densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

- **Parâmetros:** $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$
- **Suporte:** $x \in (-\infty, \infty)$